

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

11 класс



Базовый и углублённый уровни

БАЛСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

11 класс

Базовый и углублённый уровни

Москва
БАЛСС
2016

УДК 373.167.1:151
ББК 22.14я72
Р82

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Рубин, А.Г.
Р82 **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни / А.Г. Рубин, П.В. Чулков. – М. : Баласс, 2016. – 256 с. : ил. (Образовательная система «Школа 2100»).**

ISBN 978-5-906567-02-4

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа», предназначен для учащихся 11 класса, изучающих предмет на базовом или углублённом уровне. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:151
ББК 22.14я72

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть скопированы
без разрешения владельца авторских прав

ISBN 978-5-906567-02-4

© Рубин А.Г., Чулков П.В., 2016
© ООО «Баласс», 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ребята !

Перед вами учебник алгебры и начал математического анализа для одиннадцатого класса, написанный Александром Григорьевичем Рубиным и Павлом Викторовичем Чулковым. Он входит в систему учебников образовательной системы «Школа 2100».

Учебник разбит на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы. В конце каждого параграфа приводятся задания, работа с которыми позволит выяснить, с какой степенью глубины вы овладели теоретическим материалом, изложенным в этом параграфе, и, что самое важное, умеете ли вы применять его при решении конкретных задач. К большинству заданий в конце учебника приводятся ответы.

Эти задания даются на трёх уровнях сложности, принятых в учебниках образовательной системы «Школа 2100». Каждый уровень обозначается специальным образом.

Н Необходимый уровень. Задания, которые должны уметь выполнять все учащиеся. Выполнение этих заданий поможет вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П Повышенный уровень. Задания, которые выполняют те учащиеся, которые хотят углубить свои знания. Они требуют более подробного и серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может потребоваться выдвижение некоторой новой идеи.

М Максимальный уровень. Задания, которые выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом ни на каком из уровней выполнение всех содержащихся в учебнике заданий не является обязательным! Они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

В учебнике имеются отдельные параграфы и даже целые главы, предназначенные только для углублённого изучения курса. Их номера отмечены звёздочкой.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных математических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА I

Степени, корни, логарифмы

1.1. Степенная функция с натуральным показателем и её свойства

В этом параграфе мы изучим свойства функции $y = x^n$, где n – произвольное натуральное число. Она называется *степенной функцией с натуральным показателем*. При $n=1$ и $n=2$ мы уже изучали её в курсе алгебры восьмого класса.

Областью определения этой функции является множество R всех действительных чисел.

Мы уже знаем, что функция $y = x$ непрерывна при любом действительном x . При $n \geq 2$ функция $y = x^n$ также непрерывна на всей области определения как произведение n непрерывных функций $y = x$.

Сначала изучим свойства функции $y = x^n$ при $x \geq 0$, т.е. на множестве $x \in [0; +\infty)$. Перечисленные ниже свойства верны для всех натуральных n .

1) $y \geq 0$ при всех $x \geq 0$, причём $y = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2) Функции $y = x^n$ возрастающая на множестве $[0; +\infty)$.

Действительно, если взять любые два числа u и v из этого множества, такие что $u < v$, то возводя обе части этого неравенства с неотрицательными левой и правой частями в натуральную степень n , получим $u^n < v^n$.

3) $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

Это следует хотя бы из того, что при $x > 1$ справедливо неравенство $x^n \geq x$.

4) $y = 1$ при $x = 1$.

Из свойств 1 и 4 следует, что график функции $y = x^n$ при всех натуральных n проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Построить график можно, вычислив предварительно значения функции при нескольких значениях аргумента, нанеся соответствующие точки на координатную плоскость и соединяя их плавной непрерывной линией.

Графики степенных функций при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ изображены на рис. 1.1.

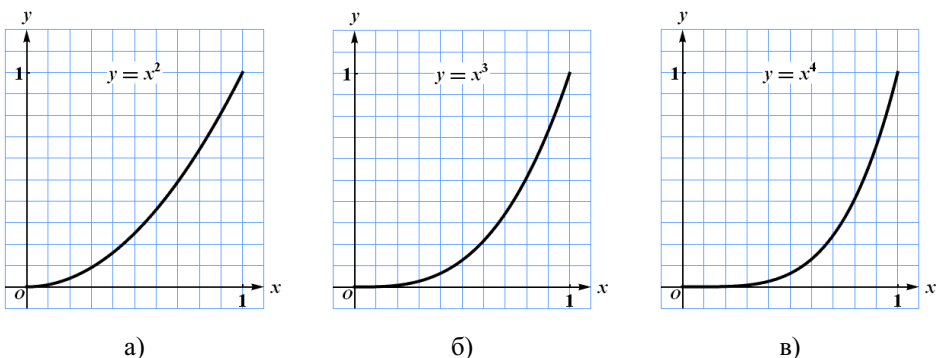


Рис. 1.1

Интересно сравнить между собой графики степенных функций $y = x^n$ при различных значениях n .

Если $x \in (0; 1)$, то $1 > x > x^2 > x^3 > x^4 > \dots$

(каждое следующее неравенство получается из предыдущего умножением обеих его частей на положительное число x).

Если же $x \in (1; +\infty)$, то $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < \dots$

(здесь тоже каждое следующее неравенство получается из предыдущего умножением обеих его частей на положительное число x).

Таким образом, если взять два натуральных числа m и n , такие что $m < n$, то на интервале $(0; 1)$ график функции $y = x^m$ будет расположен выше графика функции $y = x^n$, а на интервале $(1; +\infty)$ — наоборот, график функции $y = x^m$ будет расположен ниже графика функции $y = x^n$.

На рис. 1.2 изображены графики функций $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$ в одной системе координат.

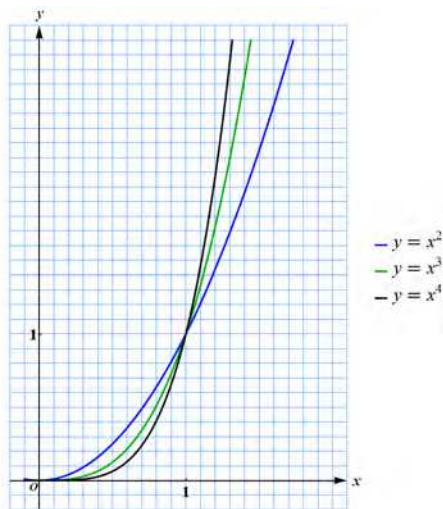


Рис. 1.2

Теперь рассмотрим функцию $y = x^n$ на всей её области определения – множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Оказывается, её свойства существенно зависят от того, чётным или нечётным является показатель степени – число n .

Докажем, что при чётном n функция $y = x^n$ является чётной.

Действительно, если n – чётное натуральное число, то $n = 2k$, где k – тоже натуральное число. Если $f(x) = x^n$, то имеем в этом случае:

$$f(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k} = \left((-x)^2\right)^k = (x^2)^k = x^{2k} = x^n = f(x),$$

А это и значит, что функция $f(x) = x^n$ является чётной при чётном n .

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, поэтому зная график при $x \in [0; +\infty)$, мы можем построить его для любого действительного x . На рис. 1.3 изображены графики функций $y = x^2$, $y = x^4$ и $y = x^6$.

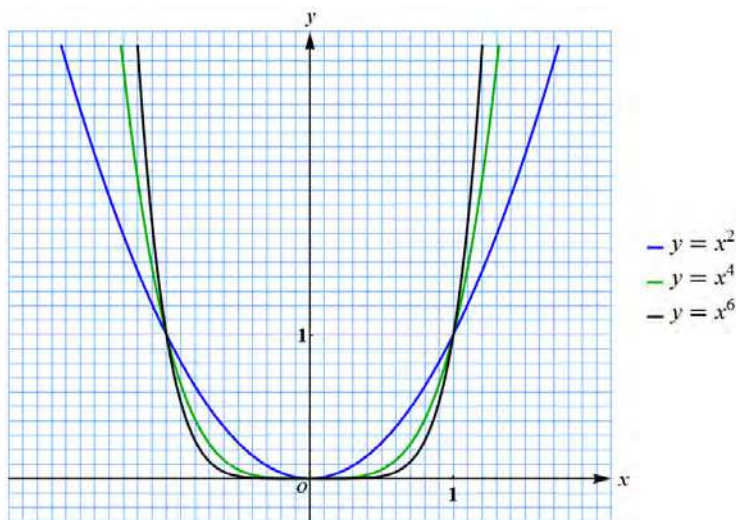


Рис. 1.3

Перечислим основные свойства функции $y = x^n$ при чётных n (они очень похожи на свойства функции $y = x^2$):

- 1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = [0; +\infty)$.
- 3) Функция чётная.
- 4) Функция убывает на интервале $(-\infty; 0]$ и возрастает на интервале $[0; +\infty)$.
- 5) Функция непрерывна в любой точке области определения.
- 6) $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- 7) $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$.

Теперь рассмотрим функцию $y = x^n$ при нечётном показателе степени n .

Докажем, что при нечётном n функция $y = x^n$ является нечётной.

Действительно, если n – нечётное натуральное число, то $n = 2k + 1$, где k – натуральное число. Если $f(x) = x^n$, то имеем в этом случае:

$$f(-x) = (-x)^n = (-x)^{2k+1} = (-x)^{2k} \cdot (-x) = x^{2k} \cdot (-x) = -x^{2k} \cdot x = -x^{2k+1} = -x^n = -f(x)$$

(мы воспользовались в процессе доказательства доказанным выше соотношением $(-x)^{2k} = x^{2k}$).

Доказанное равенство $f(-x) = -f(x)$ и значит, что функция $f(x) = x^n$ является нечётной при нечётном n .

График нечётной функции симметричен относительно начала координат, поэтому зная график при $x \in [0; +\infty)$, мы можем построить его для любого действительного x . На рис. 1.4 изображены графики функций $y = x$, $y = x^3$ и $y = x^5$.

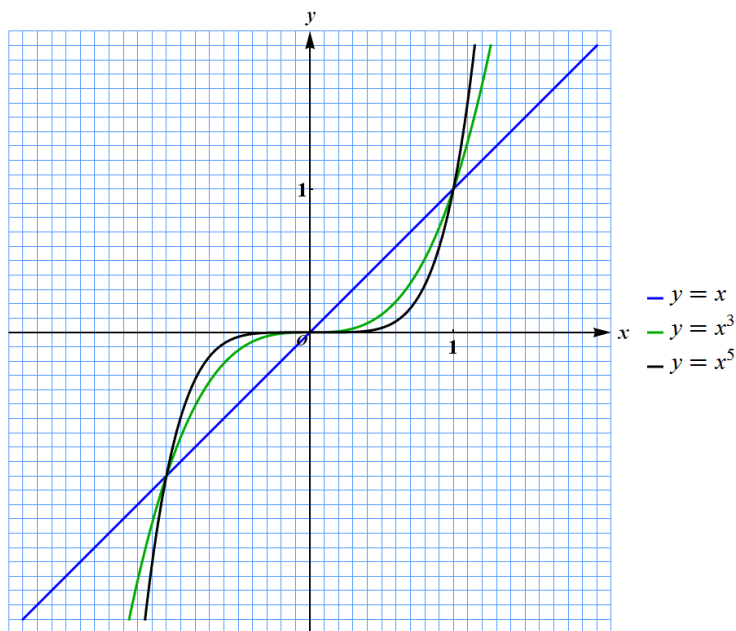


Рис. 1.4

Перечислим основные свойства функции $y = x^n$ при нечётных n :

- 1) Область определения: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функция нечётная.
- 4) Функция возрастает на всей области определения.
- 5) Функция непрерывна в любой точке области определения.
- 6) $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
- 7) $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$.

Н

- 1 а) Что называется степенной функцией с натуральным показателем?
б) Каково множество определения этой функции?
в) Каково множество значений этой функции в зависимости от показателя?
- 2 а) Какие свойства степенной функции с чётным натуральным показателем вы знаете?
б) Какие свойства степенной функции с нечётным натуральным показателем вы знаете?
- 3 а) При каких значениях n функция $y = x^n$ будет убывающей при $x \in (-\infty; 0]$?
б) При каких значениях n функция $y = x^n$ будет возрастающей во всей своей области определения?
в) При каких значениях n функция $y = x^n$ будет возрастающей при $x > 0$?
г) При каких x , справедливо, что $x^{2n} < x^{2m}$ при натуральных значениях n и m ?
- 4 Для функции $y = x^n$ известно, что $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. Что можно сказать о числе n ?
- 5 а) Для функции $y = x^n$ известно, что $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Что можно сказать о числе n ?
б) Для функции $y = x^n$ известно, что $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$. Что можно сказать о числе n ?
- 6 Сравните числа:
а) $0,3^5$ и $0,4^5$; в) $0,009^{10}$ и $0,168^{10}$; д) $0,518^{11}$ и $0,84^{11}$;
б) $0,979^4$ и $0,73^4$; г) $0,4^6$ и $0,388^6$; е) $0,567^8$ и $0,528^8$.
- 7 Сравните числа:
а) $0,3^5$ и $0,3^6$; в) $0,09^8$ и $0,09^5$; д) $0,58^8$ и $0,58^{15}$;
б) $0,305^{14}$ и $0,305^3$; г) $0,84^9$ и $0,84^{12}$; е) $0,2^{14}$ и $0,2^{12}$.
- 8 Сравните числа:
а) $3,5^5$ и $3,5^6$; в) $8,23^{15}$ и $8,23^{14}$; д) $12,88^{10}$ и $12,88^8$;
б) $14,6^6$ и $14,6^{12}$; г) $9,5^3$ и $9,5^5$; е) $18,1^6$ и $18,1^9$.
- 9 Сравните числа:
а) $(-9,2)^3$ и $(-9,2)^7$; в) $(-12,1)^{13}$ и $(-12,1)^9$; д) $(-18,9)^{11}$ и $(-18,9)^{13}$;

б) $(-19,8)^5$ и $(-19,8)^{11}$; г) $(-5,9)^{17}$ и $(-5,9)^{15}$; е) $(-8,12)^3$ и $(-8,12)^5$.

10 Сравните числа:

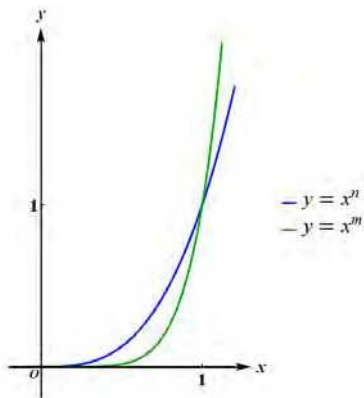
а) $(-0,22)^3$ и $(-0,21)^3$; в) $(-0,12)^{11}$ и $(-0,1)^{11}$; д) $(-0,79)^{11}$ и $(-0,7)^{11}$;
 б) $(-0,5)^7$ и $(-0,8)^7$; г) $(-0,82)^5$ и $(-0,92)^5$; е) $(-0,25)^{15}$ и $(-0,35)^{15}$.

11 Сравните числа:

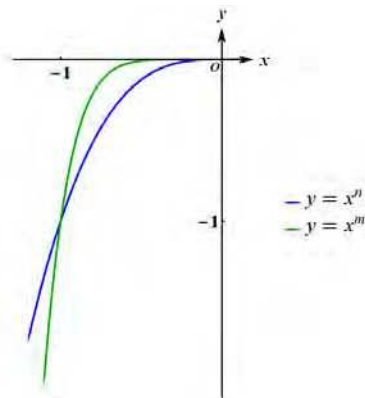
а) $(-0,92)^9$ и $(-0,92)^7$; в) $(-0,4)^3$ и $(-0,4)^5$; д) $(-0,34)^{19}$ и $(-0,34)^{21}$;
 б) $(-0,61)^9$ и $(-0,61)^{11}$; г) $(-0,9)^9$ и $(-0,9)^7$; е) $(-0,04)^{15}$ и $(-0,04)^5$.

12 На рис. 1.5 изображены графики функций $y = x^n$ и $y = x^m$. Сравните n и m для каждого из случаев.

а)



в)



б)

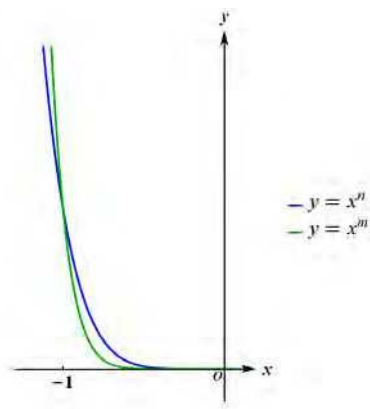


Рис. 1.5

13 Выразите в виде x^2 , x^3 , x^4 числа:

- а) 625; б) $\frac{81}{16}$; в) 0,0625; г) $\sqrt{2}$.

П

14 Сравните числа:

- а) $\frac{1}{(0,78)^5}$ и $\frac{1}{(0,78)^{10}}$; в) $\frac{1}{(0,22)^5}$ и $\frac{1}{(0,23)^5}$;
 б) $\frac{1}{(-0,23)^{17}}$ и $\frac{1}{(-0,23)^{13}}$; г) $\frac{1}{(-3,4)^{11}}$ и $\frac{1}{(-3,4)^{13}}$.

15 При каких значениях переменной x справедливы неравенства?

- а) $\left(\frac{x}{2}\right)^5 > \left(\frac{x}{2}\right)^6$; в) $\left(-\frac{x}{10}\right)^2 < \left(-\frac{x}{10}\right)^4$;
 б) $\left(-\frac{x}{4}\right)^3 > \left(-\frac{x}{4}\right)^5$; г) $(2x)^7 > (2x)^4$.

16 Среди чисел выберите наименьшее.

- а) $(0,2)^5$; $(0,1)^5$; $(0,3)^5$; $(0,02)^5$; в) $(3,5)^{22}$; $(3,5)^{10}$; $(3,5)^{23}$; $(3,5)^5$;
 б) $(-0,9)^3$; $(-0,9)^7$; $-0,9$; $(-0,9)^9$; г) $(-1,1)^{13}$; $(-0,95)^{13}$; $(-0,94)^{13}$; $(-0,2)^{13}$.

а) чётной, если $y = x^{\frac{m+1}{3}}$; в) нечётной, если $y = x^{\frac{m-3}{4}}$;

б) нечётной, если $y = x^{\frac{m+2}{5}}$; г) чётной, если $y = x^{\frac{m+5}{7}}$.

18 Докажите, что выражение $1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 - x^8$ положительно при всех $x \in (0; 1)$.

19 Докажите, что неравенство $\frac{2 + \left(\frac{x}{3}\right)^{22} - \left(\frac{x}{3}\right)^{25}}{3 + \left(\frac{x}{2}\right)^6 - \left(\frac{x}{2}\right)^{10}} > \frac{1}{2}$ справедливо при $x \in [0; 2]$.

В курсе алгебры 8 класса мы изучали квадратные корни. Понятие корня степени n (или корня n -ой степени) вводится аналогично понятию квадратного корня.

Скажем, корень третьей степени из числа 125 – это такое число, третья степень которого равен 125. Таким числом является, например, 5. Возникает вопрос: есть ещё такие числа, или 5 – единственное такое число? Ответ на этот и другие похожие вопросы мы сейчас получим. Заметим, что корень третьей степени часто называют также *кубическим корнем*.

Сначала рассмотрим случай, когда n – нечётное натуральное число. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^n$ и $y = a$ (прямая, параллельная оси Ox). Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут решениями уравнения $x^n = a$.

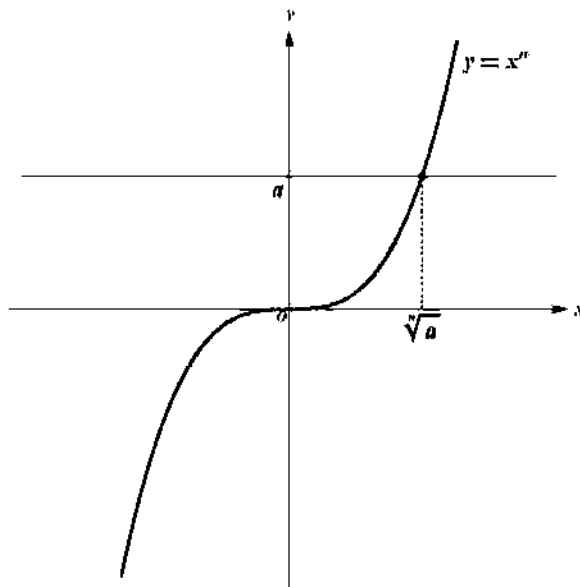


Рис. 1.6

Поскольку функция $y = x^n$ при нечётном показателе степени n является возрастающей и её областью значений является множество всех действительных чисел, то уравнение $x^n = a$ имеет решение при любом действительном значении a , причём это решение единственное.

Итак, установлено следующее:

Если n – нечётное натуральное число, то существует единственный корень n -ой степени из любого действительного числа a .
Этот единственный корень обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Из определения корня n -ой степени следует:

При нечётном натуральном n и любом действительном a :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a ; \sqrt[n]{a^n} = a .$$

Полученные выше результаты можно сформулировать по-другому, на языке обратных функций, уже знакомом вам из курса алгебры и начал математического анализа 10 класса. Если n – нечётное натуральное число, то у монотонно возрастающей функции $y = x^n$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$ и областью значений

$(-\infty; +\infty)$ существует обратная функция $y = \sqrt[n]{x}$ с областью определения $(-\infty; +\infty)$ и областью значений $(-\infty; +\infty)$, которая тоже является монотонно возрастающей. По теореме о непрерывности обратной функции можно утверждать также, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна на всей своей области определения. График функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$ (рис. 1.7).

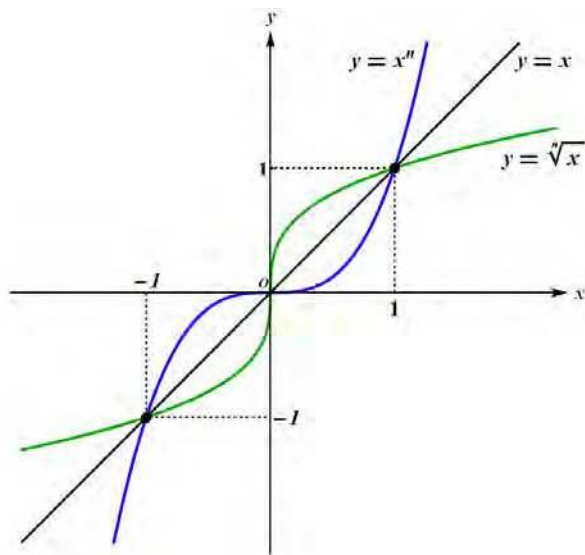


Рис. 1.7

Можно также утверждать, что поскольку при нечётном натуральном n функция $y = x^n$ является нечётной, то и обратная функция $y = \sqrt[n]{x}$ тоже является нечётной. Это следует, например, из того, что если график, симметричный относительно начала координат, отразить симметрично относительно прямой $y = x$, то получится линия, тоже симметричная относительно начала координат.

Теперь рассмотрим случай, когда n – чётное натуральное число. Здесь ситуация оказывается более сложной.

Сначала отметим, что корней чётной степени из отрицательных чисел не существует, поскольку областью значений функции $y = x^n$ при чётном показателе степени n является интервал $[0; +\infty)$, т.е. чётная натуральная степень никакого действительного числа не может быть отрицательной.

Корень чётной степени из нуля существует, причём единственный – это нуль. Действительно, $0^n = 0$, и в то же время, при $x \neq 0$ также $x^n \neq 0$ (это верно, кстати, не только при чётных, но и при любых натуральных n , просто мы сейчас говорим о чётных).

Займёмся, наконец, вопросом о корне чётной степени из положительного числа a , т.е. о решениях уравнения $x^n = a$ при чётном натуральном n и положительном a . Построим в одной системе координат графики функций $y = x^n$ и $y = a$ (прямая, параллельная оси Ox) (рис. 1.8). Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут решениями уравнения $x^n = a$.

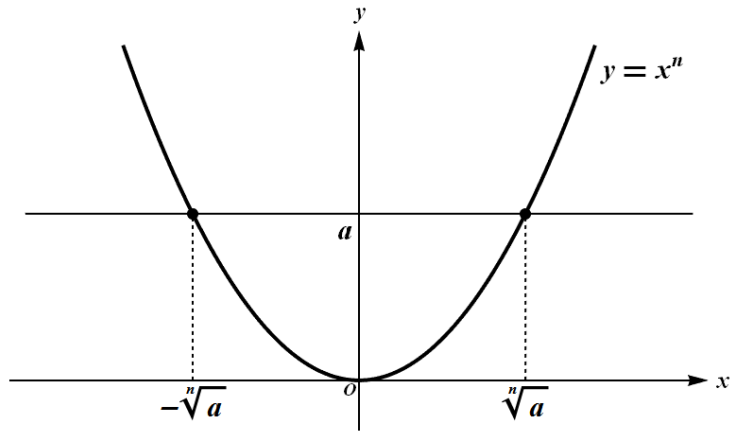


Рис. 1.8

Поскольку функция $y = x^n$ при чётном показателе степени n является возрастающей на интервале $(0; +\infty)$ и принимает на этом интервале все действительные положительные значения, то уравнение $x^n = a$ имеет положительное решение x при любом положительном значении a , причём это положительное решение единственное. А поскольку функция $y = x^n$ при чётном показателе степени n является чётной, то существует также единственное отрицательное решение уравнения $x^n = a$, равное по модулю положительному решению.

Таким образом, при $a > 0$ и чётном натуральном n уравнение $x^n = a$ имеет два различных решения, являющихся противоположными числами. Это значит, что существует ровно два корня чётной степени из любого положительного числа, у них одинаковые модули и противоположные знаки, т.е. один из этих корней положителен, а другой – отрицателен.

При этом у положительного корня чётной степени имеется специальное название.

Ведём понятие арифметического корня. Это определение можно дать для любого натурального n , а затем обсудить ситуацию с корнями чётной степени.

Арифметическим корнем n -ой степени из данного неотрицательного числа называется такое неотрицательное число, n -ая степень которого равна данному числу.

То же самое можно сказать по-другому, используя буквы. Арифметический корень n -ой степени из неотрицательного числа a – это такое неотрицательное число b , что $a = b^n$.

Для обозначения арифметического корня n -ой степени используется символ $\sqrt[n]{}$. К сожалению, это тот же символ, что и для корня нечётной степени. Можно сожалеть, что не используются разные символы, но так исторически сложилось, и с этим приходится считаться, хотя иногда это может создавать некоторые неудобства.

Вернёмся к рассмотрению случая, когда n – чётное натуральное число.

По определению арифметического корня чётной степени n запись $\sqrt[n]{a} = b$ значит, что $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a = b^n$. При этом понятно, что из того, что $a = b^n$ и n – чётное натуральное число, верность неравенства $a \geq 0$ следует автоматически. Таким образом имеет место соотношение (для чётных натуральных n):

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^n, \\ b \geq 0, \end{cases}$$

называемое *основной равносильностью для арифметического корня чётной степени*.

Скажем, $\sqrt[4]{16} = 2$, поскольку $16 = 2^4$ и $2 \geq 0$.

Можно сказать по-другому. Имеется два корня 4-ой степени из 16 – это 2 и –2. Запись $\sqrt[4]{16}$ обозначает арифметический (т.е. неотрицательный) корень 4-ой степени из 16. Это 2.

Арифметический корень из любого неотрицательного числа существует, причём единственный.

Выражение $\sqrt[n]{a}$ при чётном n имеет смысл лишь при $a \geq 0$.

Из определения арифметического корня чётной степени n следует, что:

Если n – чётное натуральное число, то:

- 1) при $a \geq 0$ выполняется соотношение: $\sqrt[n]{a} \geq 0$.
- 2) при $a \geq 0$ выполняется соотношение: $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
- 3) при любом $a \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Для доказательства последней формулы нужно убедиться, что выражение $|a|$ неотрицательно и его n -ая степень равна подкоренному выражению.

То, что модуль любого числа неотрицателен, вы знаете ещё из шестого класса.

Осталось проверить, что при чётных n , т.е. $n = 2k$, где k – тоже натуральное число, $|a|^{2k} = a^{2k}$

Если $a \geq 0$, то $|a| = a$ и $|a|^{2k} = a^{2k}$, что и требуется.

Если $a < 0$, то $|a| = -a$ и $|a|^{2k} = (-a)^{2k} = \left((-a)^2\right)^k = (a^2)^k = a^{2k}$,

что и требуется.

Таким образом, формула доказана.

Полученные выше для чётных натуральных n результаты можно сформулировать по-другому, на языке обратных функций. Если n – чётное натуральное число, то у функции $y = x^n$, рассматриваемой на её естественной области определения $(-\infty; +\infty)$, нет обратной, поскольку она не является взаимно однозначной. Если же рассмотреть функцию $y = x^n$ на интервале $x \in [0; +\infty)$, то она является монотонно возрастающей на этом интервале, и существует обратная функция с областью определения $[0; +\infty)$ и областью значений $[0; +\infty)$, которая тоже является монотонно возрастающей. Эта функция и называется арифметическим корнем чётной n -ой степени и обозначается $y = \sqrt[n]{x}$. По теореме о непрерывности обратной функции можно утверждать, что функция $y = \sqrt[n]{x}$ непрерывна на всей своей области определения. График функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$, рассматриваемой на интервале $x \in [0; +\infty)$, относительно прямой $y = x$ (рис. 1.9).

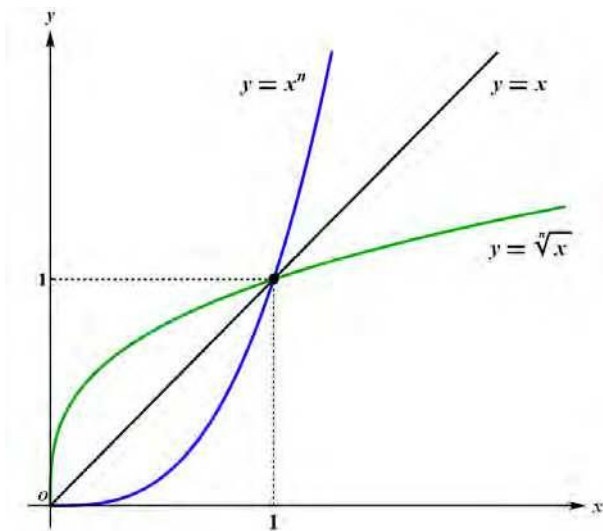


Рис. 1.9

Выведем формулу для производной функции $y = \sqrt[n]{x}$, пользуясь тем, что она является обратной к функции $y = x^n$.

Вспомним формулу для производной обратной функции.

Если функция $x = f(t)$ имеет обратную функцию $t = g(x)$, причём обе функции имеют производные, то $g'(x) = \frac{1}{f'(t)}$.

Пусть у нас $g(x) = \sqrt[n]{x}$, а её обратная функция $f(t) = t^n$.

Поскольку $f'(t) = (t^n)' = nt^{n-1}$, то по формуле для производной обратной функции $g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{nt^{n-1}}$. Осталось выразить t через x . Но у нас $t = g(x) = \sqrt[n]{x}$, значит, $g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, или окончательно $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Скажем, по этой формуле $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $(\sqrt[6]{x})' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$, и т.д.

Н

- 1 а) Что называется корнем степени n из числа a ?
б) Что называется арифметическим корнем степени n из числа a ?
в) В каком случае существует единственный корень n -й степени из числа a ?
- 2 а) Что значит найти корень n -й степени из числа a ?
а) В чём отличие графика корня нечётной степени от графика корня чётной степени?
а) Сколько значений имеет корень чётной степени из положительного числа a и почему?

- 3 Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^3 = 1$; б) $x^6 = 2$; в) $x^8 = -\frac{3}{2}$; г) $x^{13} = -11$?

- 4 Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[4]{-2}$; в) $-\sqrt[12]{8}$; д) $\sqrt[10]{\frac{22}{47}}$;
б) $\sqrt[3]{-5}$; г) $-\sqrt[13]{-0,45}$; е) $\sqrt[11]{-\pi}$?

- 5 Какие из равенств верные? Обоснуйте свой ответ.

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; в) $\sqrt[6]{262144} = 8$; д) $\sqrt[6]{729} = 3$;
б) $\sqrt[5]{1000} = 100$; г) $\sqrt[5]{16807} = 9$; е) $\sqrt[3]{-125} = -5$.

- 6 Вычислите.

а) $\sqrt[5]{0,00243}$; в) $\sqrt[5]{100000}$; д) $\sqrt[5]{0,0016}$;
б) $\sqrt[7]{-16384}$; г) $\sqrt[3]{\frac{1331}{27}}$; е) $\sqrt[4]{2401}$.

- 7 С помощью калькулятора вычислите с точностью до тысячных.

а) $\sqrt[3]{10}$; б) $\sqrt[10]{5}$; в) $\sqrt[17]{-\frac{2}{5}}$; г) $\sqrt[10]{101}$.

8 С помощью калькулятора вычислите с точностью до десятитысячных.

а) $\sqrt[5]{11} - \sqrt[6]{10}$; в) $\frac{2}{3} \sqrt[4]{0,3} \sqrt[5]{0,4}$;

б) $2\sqrt[12]{20} - 10\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$; г) $\frac{\sqrt[11]{12,7}}{\sqrt[12]{12,8}}$.

9 Найдите приближённые решения уравнений с точностью до тысячных.

а) $x^{12} = 12$; б) $x^{23} = -0,9$; в) $x^4 = \frac{1}{2}$; г) $x^{57} = 1000$.

10 Расположите числа в порядке возрастания.

а) $\sqrt[50]{13}, \sqrt[8]{13}, \sqrt[100]{13}$; в) $\sqrt[4]{8}, \sqrt[6]{11}, \sqrt[18]{7}$;

б) $\sqrt[3]{19}, \sqrt[16]{18}, \sqrt[3]{4}$; г) $\sqrt[8]{11}, \sqrt[4]{18}, \sqrt[19]{2}$.

11 Найдите значение выражения.

а) $\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{2}$; в) $\frac{\sqrt[3]{8} + \sqrt[10]{1024}}{\sqrt[4]{81}}$;

б) $(\sqrt[5]{7})^5 - (\sqrt[3]{2})^6$; г) $\frac{\sqrt[5]{243} - \sqrt[6]{64}}{\sqrt[3]{27} + (\sqrt[103]{5})^{206}}$.

12 При каких значениях переменной имеет смысл выражение?

а) $\sqrt[6]{x+1} + \sqrt[3]{1-x^2}$; в) $\sqrt[20]{x^2 + x^{10}} \sqrt{x^2 - x}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x+2} + \sqrt[5]{\frac{1}{x}}}$; г) $\sqrt[13]{\frac{3x+5}{x+2}} + \sqrt[17]{x^{15}} \sqrt{\frac{3x-5}{x-2}}$.

13 Сравните, не пользуясь калькулятором.

а) $\sqrt[10]{2}$ и $\sqrt[11]{2,2}$; в) $\sqrt[100]{100}$ и $\sqrt[150]{150}$;

б) $\sqrt[14]{0,5}$ и $\sqrt[15]{0,55}$; г) $\sqrt[3]{\pi}$ и $\sqrt[5]{\pi+2}$.

П

14. Решите уравнения.

а) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = 1$;

в) $\sqrt[9]{x^2-3x+1} = \sqrt[9]{2x^2+5x-8}$;

б) $\sqrt[4]{2x-3} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{2x+5}$;

г) $\sqrt[20]{x+\frac{1}{x}} = \sqrt[20]{2x-\frac{2}{x}}$.

15. Упростите.

а) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$;

в) $(1+\sqrt[3]{3})(1-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$;

б) $(\sqrt{7}+\sqrt{52})(\sqrt{7}-\sqrt{52})$;

г) $(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{70}+\sqrt[3]{49})$.

16. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{7}}$.

17. Сравните числа: $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$ и $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \frac{11}{1000}$.

М

18. Упростите выражение:

$$\left(\frac{2.4\sqrt{8\frac{1}{3}} - 9\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{2\frac{1}{12}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{0.5} + 1.5\sqrt{2} + 20\sqrt{\frac{1}{50}} - \sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^{1000}$$

19. Упростите выражение:

$$\sqrt[1000]{\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0.2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32} - \sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0.02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$$

20. Проведите подробное доказательство утверждения: Если нечётная функция имеет обратную функцию, то обратная функция тоже нечётная.

21. Докажите, что число $\sqrt[3]{4} + \sqrt[5]{3}$ иррационально.

1.3. Свойства корней степени n

При работе с корнями n -ой степени имеется много тонкостей и особенностей, подавляющее большинство из которых связано с чётностью или нечётностью натурального числа n . Обсудим некоторые из них – те, знания о которых у вас уже имеются из предыдущего параграфа.

Начнём с того, что внешне похожие значки, скажем, $\sqrt[5]{}$ и $\sqrt[4]{}$, используются для обозначения разных понятий. Первый из них, $\sqrt[5]{}$ – это значок корня 5-ой степени, а второй, $\sqrt[4]{}$ – это значок арифметического корня 4-ой степени. Это приводит к тому, что очень похожие по внешнему виду выражения могут преобразовываться по-разному. Например, $\sqrt[5]{a^5} = a$, а вот $\sqrt[4]{a^4} = |a|$. И было бы грубой ошибкой записать в первой формуле знак модуля или не записать его во второй формуле!

Что касается выражения $\sqrt[n]{a^n}$, то без дополнительной информации (чётное n или нечётное, либо же положительное a или отрицательное), его вообще нельзя однозначно преобразовать. Если мы знаем, что n – нечётное натуральное число, то $\sqrt[n]{a^n} = a$. Если мы знаем, что n – чётное натуральное число, то $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Если мы не знаем, чётно или нечётно n , но знаем, что a неотрицательно, то $\sqrt[n]{a^n} = a$. Если мы не знаем, чётно или нечётно n , но знаем, что a отрицательно, то ответ записать одной формулой уже непросто, но постаравшись, это можно сделать: $\sqrt[n]{a^n} = (-1)^{n+1} a$. Если же мы не имеем никакой информации ни о чётности или нечётности числа n , ни о знаке числа a , то нам просто придётся перечислять разные ответы для разных возможных случаев.

Обсуждённое в предыдущем абзаце относится к совсем простому выражению. Что касается выражений более сложных, тем более зависящих от нескольких переменных, то трудности при работе с ними могут значительно увеличиться.

Тем не менее, для многих случаев всё же удаётся вывести формулы и успешно пользоваться ими.

Докажем формулу:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при любом натуральном $n \geq 2$ и всех действительных $a \geq 0$ и $b \geq 0$.

Арифметический корень произвольной натуральной степени из произведения неотрицательных сомножителей равен произведению арифметических корней этой же степени из этих сомножителей.

Для доказательства заметим, что по правилу возведения произведения в степень имеем:

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab.$$

Кроме этого, т.к. $\sqrt[n]{a} \geq 0$ и $\sqrt[n]{b} \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$.

Таким образом, выражение $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ неотрицательно и его квадрат равен ab . По определению это выражение есть арифметический корень n -ой степени из ab , т.е. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, что и требовалось доказать.

Выведенная формула применяется для упрощения вычислений с радикалами.

Рассмотрим несколько примеров:

$$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$\sqrt[3]{64 \cdot 216} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{216} = 4 \cdot 6 = 24.$$

Формула для арифметического корня n -ой степени из произведения справедлива также для трёх, четырёх, и т.д. сомножителей. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить несколько раз уже доказанную формулу для произведения двух арифметических корней. Скажем:

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \text{ при всех } a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right) \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{ab} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{(ab) \cdot c} = \sqrt[n]{abc}.$$

Пример использования этой формулы:

$$\sqrt[5]{20 \cdot 4 \cdot 0,4} = \sqrt[5]{20 \cdot 4 \cdot 0,4} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

Особо отметим: применяя обсуждаемую формулу, очень важно помнить, что при чётном показателе корня каждый множитель в подкоренном выражении должен быть неотрицательным. Нужно не забывать проверку этой неотрицательности.

Скажем, если преобразовывая радикал $\sqrt[8]{ab}$, мы напишем машинально $\sqrt[8]{a} \cdot \sqrt[8]{b}$ без анализа ситуации, то это будет грубой ошибкой. Действительно, область допустимых значений переменных в преобразуемом выражении $\sqrt[8]{ab}$ задаётся соотношением $ab \geq 0$, а это вовсе не значит, что $a \geq 0$ и $b \geq 0$ в отдельности, как того требует формула. В выражении $\sqrt[8]{ab}$ допустимыми значениями букв являются, например, $a = -5$, $b = -7$. Ясно, что недопустимо писать $\sqrt[8]{(-5) \cdot (-7)} = \sqrt[8]{-5} \cdot \sqrt[8]{-7}$, т.к. правая часть не имеет смысла (что касается левой, то она имеет смысл и равна $\sqrt[8]{35}$).

Заметим также, что при нечётных n формула $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ верна для всех действительных значений a и b . Здесь уже можно спокойно писать, скажем, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, не опасаясь никаких неприятных сюрпризов.

Теперь познакомимся с формулой для извлечения корня из частного. Она имеет следующий вид:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ при любом натуральном } n \geq 2 \text{ и всех действительных } a \geq 0 \text{ и } b > 0.$$

Арифметический корень произвольной натуральной степени из частного, где делимое неотрицательно, а делитель положителен, равен соответственному частному арифметических корней этой же степени.

Можно дать другую, более длинную формулировку:

При извлечении арифметического корня из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем можно отдельно извлечь такой же арифметический корень из числителя и записать в числителе и отдельно извлечь такой же арифметический корень из знаменателя и записать в знаменателе.

Доказательство этой формулы абсолютно аналогично приведённому выше доказательству формулы для произведения, и чрезвычайно полезно провести его самостоятельно.

Рассмотрим несколько примеров применения этой формулы:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4};$$

$$\sqrt[4]{48} : \sqrt[4]{3} = \frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Аналогично тому, как мы обсуждали это для произведения, в случае арифметического корня чётной степени из частного необходимо следить за знаками числителя и знаменателя.

Заметим также, что при нечётных n формула $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ верна для всех действительных значений a и b , таких что $b \neq 0$.

Обсудим ещё три ситуации, часто возникающие при преобразовании выражений с корнями (по-другому такие выражения ещё называются *иррациональными*): возведение корня в степень и извлечение корня из корня.

При любых натуральных $n \geq 2$, $m \geq 2$ и всех действительных $a \geq 0$ верны следующие равенства:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{mk}}.$$

Их словесные формулировки следующие:

Для возведения арифметического корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение.

При извлечении арифметического корня из арифметического корня показатели корней перемножаются.

В арифметическом корне показатель корня и показатель степени в подкоренном выражении можно умножить на одно и то же натуральное число.

Первое равенство, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, можно доказать с помощью доказанной в начале параграфа формулы $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, верной, как было сказано, для трёх, четырёх и т.д. сомножителей. Имеем:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{(\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{a}) \cdot \dots \cdot (\sqrt[n]{a})}_{m \text{ раз}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ раз}}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ что и требовалось.}$$

Для доказательства второго равенства, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, достаточно показать, что $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = a$, т.к. условие $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \geq 0$ при $a \geq 0$ безусловно выполнено. Имеем:

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \left((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m \right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ поскольку при возведении арифметического}$$

корня k -ой степени в степень k получается подкоренное выражение.

Наконец, третье равенство, $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^{mk}}^m$, докажем с помощью первого и второго. Имеем: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mk}}^k} = \sqrt[n]{a^k}$, поскольку при $a \geq 0$ всегда $\sqrt[n]{a^m} = a$.

Рассмотрим несколько примеров использования доказанных формул.

$$1) \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16;$$

$$2) \sqrt[12]{3^8} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9};$$

$$3) \sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Н

- 1 а) Что называется арифметическим корнем степени n из числа?
 б) В чём отличие арифметического корня степени n из числа от корня степени n из этого же числа?

2 а) В каком случае формула $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ верна?

б) В каком случае формула $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ верна?

в) Когда верны равенства $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}$?

3 а) Как найти произведение двух арифметических корней n -й степени из числа a ?

б) Как найти отношение двух арифметических корней n -й степени из числа a ?

4 а) Как найти корень n -й степени из корня m -й степени из числа a ?

б) Как возвести в n -ю степень арифметический корень m -й степени из числа a ?

5 а) Верно ли, что для нечётных n справедливо равенство $\sqrt[n]{a^n} = a$? Если нет, то исправьте равенство так, чтобы оно было верным.

б) Верно ли, что для чётных n справедливо равенство $\sqrt[n]{a^n} = a$? Если нет, то исправьте равенство так, чтобы оно было верным.

6 Вычислите.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| а) $\sqrt{25^3}$; | в) $\sqrt[3]{8^4}$; | д) $\sqrt[6]{81^3}$; |
| б) $\sqrt[3]{27^4}$; | г) $\sqrt[10]{49^5}$; | е) $\sqrt[8]{256^5}$. |

7 Вычислите.

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------|
| а) $\sqrt[5]{32}$; | в) $\sqrt[5]{243}$; | д) $\sqrt[3]{1331}$; |
| б) $\sqrt[3]{216}$; | г) $\sqrt[8]{256}$; | е) $\sqrt[4]{625}$. |

8 Вычислите.

- | | | |
|---|---|---|
| а) $\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{7}}$; | в) $\frac{\sqrt[5]{1701}}{\sqrt[5]{7}}$; | д) $\frac{\sqrt[3]{1080}}{\sqrt[3]{5}}$; |
| б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; | г) $\frac{\sqrt[3]{363}}{\sqrt[3]{3}}$; | е) $\frac{\sqrt[10]{7168}}{\sqrt[10]{7}}$. |

9 Вычислите.

а) $\sqrt[3]{40} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$;

в) $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{216}$;

д) $\sqrt[6]{\frac{625}{9}} \cdot \sqrt[6]{\frac{25}{81}}$;

б) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{125}$;

г) $\sqrt[5]{729} \cdot \sqrt[5]{81}$;

е) $\sqrt[3]{\frac{16}{7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{49}}$.

10 Упростите:

а) $\sqrt[6]{x^6}$;

в) $\sqrt[13]{x^{13}}$;

д) $\sqrt[102]{x^{102}}$;

б) $\sqrt[9]{x^9}$;

г) $\sqrt[20]{x^{20}}$;

е) $\sqrt[27]{x^{27}}$.

11 Упростите:

а) $\sqrt[4]{(s-3)^4}$, если $s \geq 3$;

в) $\sqrt[7]{(1-2s)^7}$, если $s \leq \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt[4]{(s-3)^4}$, если $s \leq 3$;

г) $\sqrt[7]{(1-2s)^7}$, если $s \geq \frac{1}{2}$.

12 Упростите:

а) $\sqrt[6]{(\pi-3)^6}$;

в) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}$;

б) $\sqrt[10]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{10}}$;

г) $\sqrt[8]{(\sqrt{5}-2\sqrt{3})^8}$.

13 Упростите выражение $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, если:

а) $x > 0, y > 0$;

в) $x < 0, y < 0$;

б) $x < 0, y > 0$;

г) $x > 0, y < 0$.

14 Упростите выражение $\sqrt[12]{(2x-3x^2+x^3)^{12}}$.

15 Упростите числовое выражение

а) $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}} + \sqrt[4]{64\sqrt[3]{0,5}} - 3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$;

б) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}} - 3\sqrt[3]{9\sqrt{162}} - 5\sqrt[5]{18} + 2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

16 Упростите числовое выражение.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \right)^4 + \left(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}} \right)^2 ; \text{ в) } \frac{3\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{26}{7}\right)^2}\right)^3} - 4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{26}{7}\right)^2}\right)^3} + 4} + \frac{3\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{26}{7}\right)^2}\right)^3} + 4}{3\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{26}{7}\right)^2}\right)^3} - 4} ; \\ \text{б) } & \frac{2\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^3} + 1}{2\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^3} - 1} - \frac{2\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^3} - 1}{2\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^3} + 1} ; \text{ г) } \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}-1}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}-1}\right)^3} - \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{5}-1}}} . \end{aligned}$$

П

17 Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}} + \frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}} + 2 \right) : \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x+y}} \right)$.

18 Упростите выражение $\frac{\sqrt[7]{11^4} - 1}{\sqrt[7]{11^4} + (\sqrt[7]{11})^2} + \frac{1}{\sqrt[7]{121}} + \frac{1}{\sqrt[7]{11^3}} + \frac{\sqrt[7]{11^6} - 1}{(\sqrt[7]{11})^6 + \sqrt[7]{11^3}}$.

19 Упростите числовое выражение.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} ; & \text{в) } & \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} ; \\ \text{б) } & \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} ; & \text{г) } & \sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} . \end{aligned}$$

20 Упростите выражение.

$$\text{a) } \frac{(\sqrt[17]{k^3} - 1)(1 + \sqrt[17]{k^3})}{\sqrt[17]{k^6} - 1} + \frac{\sqrt[17]{k^8} - 2}{1 + \sqrt[17]{k^4}} + \frac{(\sqrt[17]{k^2} - 1)(1 + \sqrt[17]{k^2})}{\sqrt[17]{k^8} - 1} ;$$

$$6) \left(\frac{\sqrt[5]{x}-3}{2\sqrt[5]{x}+1} + \frac{\sqrt[5]{x}-2}{3\sqrt[5]{x}+6} \right) \left(\frac{\frac{\sqrt[5]{x}(6\sqrt[5]{x}-5\sqrt[5]{x^2}+20)}{(\sqrt[5]{x}-1)(6\sqrt[5]{x^2}+15\sqrt[5]{x}+6)} + 6\sqrt[5]{\frac{1}{x}}}{\frac{\sqrt[5]{x}-3}{2\sqrt[5]{x}+1} + \frac{\sqrt[5]{x}-2}{3\sqrt[5]{x}+6}} + \frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}-1} \right).$$

M

21 Упростите выражение.

$$a) \left(1 + \frac{\sqrt[15]{z^6}-1}{1+\sqrt[15]{z^6}} \right) \left(\sqrt[15]{\frac{1}{z^6}} \left(\sqrt[15]{z^7} + \sqrt{\sqrt[15]{z^6} + \sqrt[15]{z^{12}}} \right) - \sqrt[15]{z} \right)^2;$$

$$6) \left(\frac{\sqrt[3]{p^5}-\sqrt[6]{q^3}}{\sqrt[3]{p^3}-\sqrt[6]{q^5}} + \frac{\sqrt[3]{p^5}+\sqrt[6]{q^3}}{\sqrt[3]{p^3}+\sqrt[6]{q^5}} \right) \left(-\sqrt[3]{p^5} \sqrt[6]{\frac{1}{q^5}} + \frac{2\sqrt[3]{p^{13}} + \sqrt[3]{p^7} \sqrt[6]{q^4} - 2\sqrt[3]{p^5} \sqrt[6]{q^8} - \sqrt[3]{p} \sqrt[6]{q^{14}}}{2\sqrt[3]{p^8} \sqrt[6]{q^5} - 2\sqrt[6]{q^{13}}} \right).$$

22. Всегда ли можно записать арифметический корень из произведения в виде произведения арифметический корней? Если нет, объясните, почему. Если да, продолжите запись формулы и докажите её: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

23. Упростите числовое выражение: $(\sqrt[3]{2}+1) \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt[3]{2}-1)$.

24 Докажите, что если $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$, то $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

1.4. Степень с рациональным показателем

Из курса алгебры восьмого класса вы знаете, что такое степень ненулевого числа с произвольным целым показателем. В этом параграфе мы определим степень с произвольным рациональным показателем, правда, это удастся сделать только для положительных оснований.

Начнём с положительного рационального показателя степени, не являющегося целым числом (т.к. для целых положительных показателей степень уже определена).

Пусть a – произвольное действительное положительное число, а $\frac{m}{n}$ – произвольное положительное рациональное число, где m и n – натуральные числа, $n \geq 2$

Тогда по определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Прежде всего, отметим, что нужно доказать *корректность* приведённого определения. Это значит следующее: положительное рациональное число может быть записано в виде обыкновенной дроби неоднозначно, скажем, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{42}{56} = \dots$.

Значит, нам нужно удостовериться, что если $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, то $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[s]{a^r}$, иначе наше определение будет противоречивым, некорректным. По доказанной в предыдущем параграфе формуле $\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[mn]{a^{mk}}$ имеем: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[ns]{a^{ms}}$. По этой же формуле имеем также: $\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{nr}}$. Осталось доказать, что $\sqrt[ns]{a^{ms}} = \sqrt[ns]{a^{nr}}$. Поскольку показатели корней одинаковые, то достаточно показать, что показатели степеней в подкоренных выражениях одинаковы, т.е. $ms = nr$. Но поскольку у нас $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$, то это равенство следует из основного свойства дроби. Таким образом, корректность определения установлена.

Для отрицательных рациональных показателей будем действовать аналогично тому, как мы действовали при определении степени с отрицательным целым показателем.

Пусть a – произвольное действительное положительное число, а $-x$ – произвольное отрицательное рациональное число. Тогда рациональное число x – положительное, и по определению $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Это можно расписать подробнее. Если отрицательное рациональное число – целое, то всё ясно. Отрицательное нецелое рациональное число имеет вид $-\frac{m}{n}$, где m

и n – натуральные числа, $n \geq 2$. Тогда по определению $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Наконец, если a – произвольное положительное число, а показатель степени равен нулю (нуль – тоже рациональное число!), то, как и прежде, по определению $a^0 = 1$.

Рассмотрим несколько примеров:

$$1) 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4;$$

$$2) 625^{-0,75} = \frac{1}{625^{0,75}} = \frac{1}{625^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{625^3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[4]{625}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sqrt{625}}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{25}\right)^3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125};$$

$$3) 2^{1,5} - 2^{0,5} = 2^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2^3} - \sqrt{2^1} = \sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Изучим свойства степени с действительным положительным основанием и рациональным показателем.

Прежде всего, отметим очень простое, но очень важное свойство – положительность.

Если a – произвольное действительное положительное число, а x – произвольное рациональное число, то $a^x > 0$.

Рассмотрим отдельно три случая.

1) Если $x = 0$, то $a^x = a^0 = 1 > 0$.

2) Если $x > 0$ и $x = \frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа, $n \geq 2$, то $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Но при $a > 0$ также $a^m > 0$, а корень из положительного числа положителен, т.е. $\sqrt[n]{a^m} > 0$.

3) Если $x < 0$, то $-x > 0$, по пункту 2 $a^{-x} > 0$, и тогда $a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$.

Во всех трёх случаях неравенство доказано.

Вспомним основные свойства степени с целым показателем, известные нам ещё из курса алгебры восьмого класса.

При всех действительных a и b , таких, что $a \neq 0$; $b \neq 0$ и всех целых x и y :

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- 3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
- 4) $a^x : b^x = (a:b)^x$;
- 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Оказывается, все эти формулы верны и в случае, если a и b – произвольные положительные действительные числа, а x и y – произвольные рациональные числа.

Для доказательства выписанных формул сначала установим, что формула $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, доказанная нами в предыдущем параграфе для натуральных m и n , где $n \geq 2$, справедлива и в случае, когда n , по-прежнему натуральное, $n \geq 2$, а m – произвольное целое число, и a – произвольное действительное положительное число.

Действительно, при $m = 0$ и левая, и правая часть доказываемой формулы равна единице: $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^0 = 1$; $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^0} = \sqrt[n]{1} = 1$.

При $m < 0$ сделаем замену $m = -k$; тогда $k > 0$; $k = -m$, и имеем:

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^{-k} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^k}} = \sqrt[n]{a^{-k}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Из доказанного факта вытекает, что $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если число m – целое, а n – натуральное, $n \geq 2$, и a – произвольное действительное положительное число.

Теперь приступим к доказательству выписанных пяти формул.

Если рациональные числа x и y – целые, то справедливость формул нам уже известна из курса алгебры восьмого класса.

Если хотя бы одно из чисел x или y – не целое, то приведём их к общему знаменателю; пусть $x = \frac{m}{n}$; $y = \frac{k}{n}$, где n – натуральное $n \geq 2$, а m и k – целые. Тогда имеем:

$$1) a^x \cdot a^y = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{x+y}.$$

$$2) a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^k}} = \sqrt[n]{a^{m-k}} = a^{\frac{m-k}{n}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{k}{n}} = a^{x-y}.$$

$$3) a^x \cdot b^x = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^x;$$

$$4) a^x : b^x = \frac{a^x}{b^x} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^x;$$

5) При доказательстве последней формулы нет необходимости приводить рациональные числа x или y к общему знаменателю. Пусть $x = \frac{m}{n}$; $y = \frac{k}{s}$, где n и s – натуральные $n \geq 2$; $s \geq 2$, а m и k – целые. Тогда:

$$(a^x)^y = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{s}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{k}{s}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{k}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k} = \sqrt[s]{\sqrt[n]{a^{mk}}} = \sqrt[ns]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{ns}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{s}} = a^{xy} a^{\frac{m}{n}}.$$

Установим ещё несколько важных свойств степени действительного положительного числа с рациональным показателем. Оказывается, многие из этих свойств зависят от того, больше или меньше единицы основание.

Если a – действительное число, $a > 1$,
а x – рациональное число, то:

- 1) $a^x > 1$ при $x > 0$;
- 2) $0 < a^x < 1$ при $x < 0$.

Достаточно доказать часть 1), поскольку часть 2) следует из неё. Действительно, если $x < 0$, то выполним замену $u = -x$; тогда $u > 0$ и $x = -u$. Раз пункт 1) предполагается доказанным, то $a^u > 1$, а значит, $0 < \frac{1}{a^u} < 1$. Но ведь как раз

$$a^x = a^{-u} = \frac{1}{a^u}.$$

Приступим к доказательству пункта 1), т.е. предполагая, что $x > 0$.

а) Сначала рассмотрим случай, когда x – целое число.

Если $x = 1$, то неравенство $a^x > 1$ переписется в виде $a > 1$ и выполняется по условию. Если, $x \geq 2$, то возводя в натуральную степень x обе части неравенства $a > 1$ с положительными частями, получим требуемое $a^x > 1$.

б) Если x – положительное нецелое рациональное число, то оно имеет вид $x = \frac{m}{n}$,

где m и n – натуральные числа, $n \geq 2$ и $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$. Если мы установим, что $\sqrt[n]{a} > 1$, то верность доказываемого утверждения будет следовать из пункта а) – ведь $\sqrt[n]{a}$ возводится в целую положительную степень m . Но предположив, что $\sqrt[n]{a} \leq 1$ и возводя в натуральную степень n обе части этого неравенства с положительными частями, получили бы, что $a \leq 1$, что противоречит условию.

Аналогично доказывается свойство степеней с рациональным показателем при положительном действительном основании, меньшим единицы:

Если a – действительное число,
 $0 < a < 1$, а x – рациональное число, то:

- 1) $0 < a^x < 1$ при $x > 0$;
- 2) $a^x > 1$ при $x < 0$.

Рассмотрим вопрос о сравнении двух степеней с одинаковым положительным основанием и рациональными показателями. Скажем, если a – действительное положительное число, а x и y – рациональные числа, такие что $x < y$, то какое из

чисел больше: a^x или a^y ? Оказывается, ответ зависит от того, больше или меньше единицы основание a .

Если a – действительное число, $a > 1$, а x и y – рациональные числа, такие что $x < y$, то $a^x < a^y$.

Для сравнения чисел a^x и a^y составим их разность и преобразуем её, пользуясь свойствами степеней с рациональным показателем: $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$. Поскольку $x < y$, то $y - x > 0$ и при $a > 1$ по доказанному выше $a^{y-x} > 1$, а значит, $1 - a^{y-x} < 0$. Поскольку $a^x > 0$, установлено, что $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x}) < 0$, а значит, $a^x < a^y$, что и требовалось.

При положительном основании, меньшем единицы, ситуация противоположная:

Если a – действительное число, $0 < a < 1$, а x и y – рациональные числа, такие что $x < y$, то $a^x > a^y$.

Для доказательства, как и ранее, выпишем разность чисел a^x и a^y и преобразуем её: $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x})$. Т.к. $x < y$, то $y - x > 0$ и при $0 < a < 1$ будем иметь $a^{y-x} < 1$, а значит, $1 - a^{y-x} > 0$. Теперь в произведении $a^x(1 - a^{y-x})$ оба сомножителя положительные, а значит $a^x(1 - a^{y-x}) > 0$. Поэтому $a^x - a^y = a^x(1 - a^{y-x}) > 0$, а значит, $a^x > a^y$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько примеров на сравнение степеней с рациональным показателем.

Пример 1. Сравните $0,4^{0,7}$ и $0,4^{0,8}$.

Решение. Основания одинаковые, причём $0 < 0,4 < 1$. Для показателей выполняется неравенство $0,7 < 0,8$. По последней доказанной теореме заключаем, что $0,4^{0,7} > 0,4^{0,8}$.

Пример 2. Сравните $0,4^{0,7}$ и $0,3^{0,7}$.

Решение. Поскольку оба числа положительные рассмотрим их частное и сравним его с единицей: $\frac{0,4^{0,7}}{0,3^{0,7}} = \left(\frac{0,4}{0,3}\right)^{0,7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{0,7} > 1$ по теореме, что при действительном $a > 1$ и рациональном $x > 0$ выполняется неравенство $a^x > 1$. Итак, $0,4^{0,7} > 0,3^{0,7}$.

Пример 3. Сравните $0,6^{0,2}$ и $0,5^{0,3}$.

Решение. Если в двух предыдущих примерах либо основания, либо показатели были одинаковы, то здесь это уже не так. Рассмотрим число $0,5^{0,2}$ и сравним его с каждым из данных чисел так же, как сделано в примерах 1 и 2.

$$\text{а) } 0,6^{0,2} > 0,5^{0,2}, \text{ т.к. } \frac{0,6^{0,2}}{0,5^{0,2}} = \left(\frac{6}{5}\right)^{0,2} > 1;$$

б) $0,5^{0,2} > 0,5^{0,3}$, т.к. при положительном основании, меньшем единицы, больше та степень, показатель которой меньше.

Итак, установлено, что $0,6^{0,2} > 0,5^{0,2} > 0,5^{0,3}$, а значит. $0,6^{0,2} > 0,5^{0,3}$.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о том, как можно определить степень положительного действительного числа с иррациональным показателем.

Для начала рассмотрим ситуацию, когда основание a – действительное число, большее единицы. Пусть x – иррациональное число. Рассмотрим приближения числа x десятичными дробями с недостатком и с избытком. Пусть y_n и z_n – десятичные приближения иррационального числа x до n -го знака после запятой с недостатком и с избытком соответственно. Скажем, y_1 и z_1 – приближения с точностью до десятых, y_2 и z_2 – до сотых, y_3 и z_3 – до тысячных, и т.д. Тогда $y_n < x < z_n$ при любом натуральном n , и, кроме того

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq \dots \text{ и } \dots \leq z_4 \leq z_3 \leq z_2 \leq z_1.$$

На основании свойств степеней с действительным основанием, большим единицы, и рациональными показателями, можно утверждать, что

$$a^{y_1} \leq a^{y_2} \leq a^{y_3} \leq a^{y_4} \leq \dots \text{ и } \dots \leq a^{z_4} \leq a^{z_3} \leq a^{z_2} \leq a^{z_1}.$$

Можно доказать, что существует, причём единственное, действительное число t , такое что $a^{y_n} < t < a^{z_n}$ при любом натуральном n . Это число и называется степенью числа $a > 1$ с иррациональным показателем x , т.е. $t = a^x$.

Если же основание a – действительное положительное число, меньшее единицы, а x – иррациональное число, то точно так же рассматривая приближения до n -го знака после запятой числа x десятичными дробями y_n и z_n с недостатком и с избытком соответственно, мы получим, что при $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq \dots$ и $\dots \leq z_4 \leq z_3 \leq z_2 \leq z_1$ и основании $a \in (0; 1)$ будут выполняться неравенства

$$a^{y_1} \geq a^{y_2} \geq a^{y_3} \geq a^{y_4} \geq \dots \text{ и } \dots \geq a^{z_4} \geq a^{z_3} \geq a^{z_2} \geq a^{z_1}.$$

Можно доказать, что существует, причём единственное, действительное число t , такое что $a^{z_n} < t < a^{y_n}$ при любом натуральном n . Это число и называется степенью числа $a \in (0; 1)$ с иррациональным показателем x , т.е. $t = a^x$.

Для ребят, занимающихся математикой на углублённом уровне, все эти построения будут описаны подробно в параграфе 1.5.

Таким образом, мы определили степень действительного положительного числа и с рациональным, и с иррациональным, т.е. с любым действительным показателем.

Как и следовало ожидать, при всех действительных положительных a и b и при всех действительных x и y остаются справедливыми привычные нам формулы преобразования степеней:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- 3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
- 4) $a^x : b^x = (a:b)^x$;
- 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

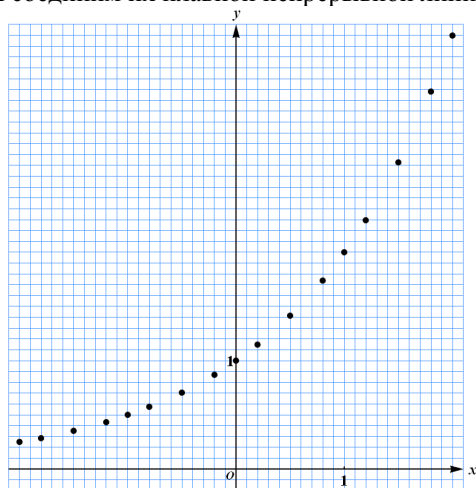
Если a – действительное число, такое что $a > 0$ и $a \neq 1$, то при любом действительном x определена степень a^x , и тем самым определена функция $y = a^x$ с областью определения R . Она называется *показательной функцией*. Число a называется основанием показательной функции $y = a^x$. Оказывается, свойства показательной функции существенно зависят от того, большим или меньшим единицы является её основание.

Построим график показательной функции при $a = 2$, т.е. график функции $y = 2^x$.

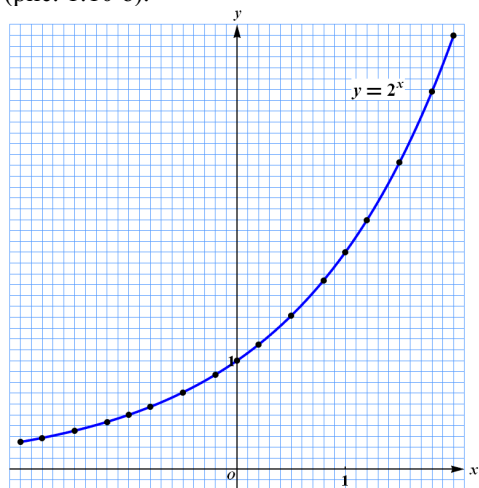
Составим таблицу значений функции $y = 2^x$ при нескольких значениях аргумента:

x	0	1	-1	2	-2	0,5	-0,5	0,2	-0,2	0,8	-0,8	1,2	-1,2	1,5	-1,5	1,8	-1,8
y	1	2	0,5	4	0,25	1,41	0,71	1,15	0,87	1,74	0,57	2,3	0,44	2,83	0,35	3,48	0,29

Теперь нанесём соответствующие точки на координатную плоскость (рис. 1.10 а) и соединим их плавной непрерывной линией (рис. 1.10 б).



а)



б)

Рис. 1.10

Свойства показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$.

- 1) Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = (0; +\infty)$.
- 3) Функция непрерывна на всей области определения.
- 4) Функция возрастающая на всей области определения.
- 5) При всех значениях $a > 1$ график функции проходит через точку $(0; 1)$.
- 6) Функция принимает значения, меньшие 1, на интервале $(-\infty; 0)$ и функция принимает значения, большие 1, на интервале $(0; +\infty)$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, т.е. ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \rightarrow -\infty$.

На рис. 1.11 изображены графики показательной функции $y = a^x$ при $a = \frac{4}{3}$ и $a = 3$.

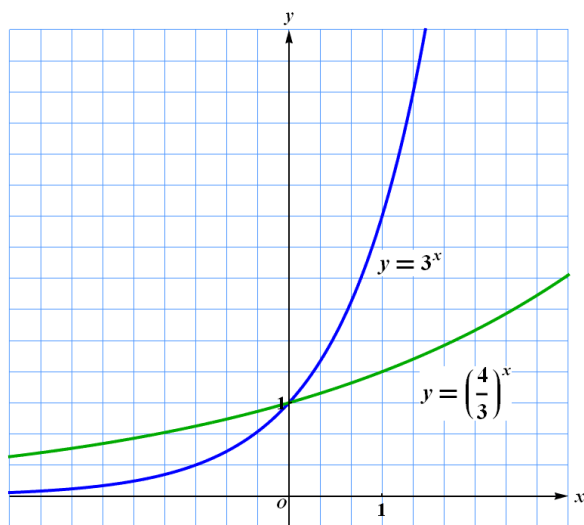


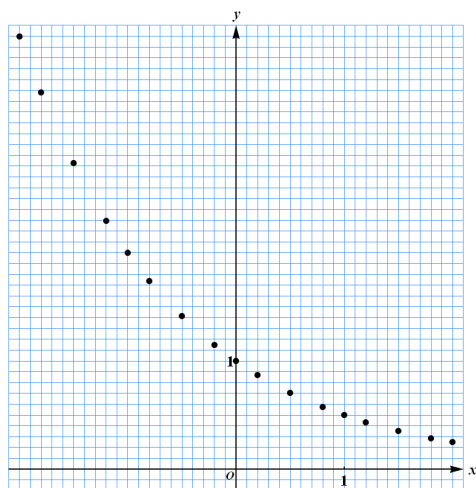
Рис. 1.11

Теперь построим график показательной функции при $a = \frac{1}{2}$, т.е. график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

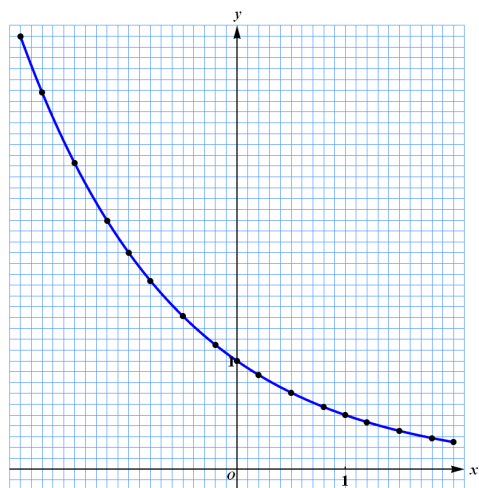
Составим таблицу значений функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ при нескольких значениях аргумента. При этом можно воспользоваться ранее составленной таблицей для функции $y = 2^x$, поскольку $\left(\frac{1}{2}\right)^t = 2^{-t}$.

x	0	1	-1	2	-2	0,5	-0,5	0,2	-0,2	0,8	-0,8	1,2	-1,2	1,5	-1,5	1,8	-1,8
y	1	0,5	2	0,25	4	0,71	1,41	0,87	1,15	0,57	1,74	0,44	2,3	0,35	2,83	0,29	3,48

Теперь нанесём соответствующие точки на координатную плоскость (рис. 1.12 а) и соединим их плавной непрерывной линией (рис. 1.12 б).



а)



б)

Рис. 1.12

Свойства показательной функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$.

- 1) Область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = (0; +\infty)$.
- 3) Функция непрерывна на всей области определения.

- 4) Функция убывающая на всей области определения.
- 5) При всех значениях $0 < a < 1$ график функции проходит через точку $(0; 1)$.
- 6) Функция принимает значения, меньшие 1, на интервале $(0; +\infty)$ и функция принимает значения, большие 1, на интервале $(-\infty; 0)$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, т.е. ось абсцисс является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \rightarrow +\infty$.
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

На рис. 1.13 изображены графики показательной функции $y = a^x$ при $a = \frac{1}{3}$ и $a = \frac{3}{4}$.

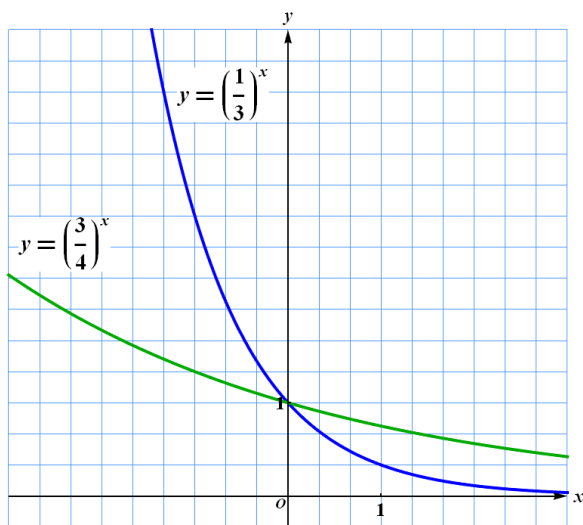


Рис. 1.13

Н

- 1 а) Что называется степенью действительного числа с рациональным показателем?
- б) Для каких действительных чисел определена их степень с рациональным показателем?

- 2** а) Какую функцию называют показательной?
 б) Как выглядит график показательной функции при основании большем 1?
 в) Как выглядит график показательной функции при основании большем 0, но меньшем 1?
 г) Через какую точку проходит график любой показательной функции?

- 3** Может ли степень с рациональным показателем быть:
 а) положительной? б) отрицательной? в) равной нулю?

- 4** а) Как перемножают рациональные степени одного и того же положительного числа? Запишите формулу и прочитайте её.
 б) Как делят рациональные степени одного и того же положительного числа? Запишите формулу и прочитайте её. Всегда ли возможно выполнить такое деление?

- 5** а) Как сравнивают две степени с рациональными показателями при основании, большем единицы. Приведите примеры.
 б) Как сравнивают две степени с рациональными показателями при положительном основании, меньшем единицы. Приведите примеры.

- 6** Запишите в виде корня.

- а) $5^{\frac{2}{3}}$; в) $7^{\frac{4}{5}}$; д) $10^{\frac{1}{4}}$;
 б) $2^{\frac{3}{14}}$; г) $11^{\frac{5}{7}}$; е) $9^{\frac{1}{7}}$.

- 7** Сравните числа.

- а) $4^{\frac{2}{3}}$ и $4^{\frac{3}{4}}$; в) $3^{\frac{6}{7}}$ и $3^{\frac{5}{2}}$; д) $2^{\frac{1}{5}}$ и $2^{\frac{2}{3}}$;
 б) $0,7^{\frac{5}{3}}$ и $0,7^{\frac{7}{4}}$; г) $0,1^{\frac{1}{11}}$ и $0,1^{\frac{8}{9}}$; е) $0,25^{\frac{4}{5}}$ и $0,25^{\frac{5}{7}}$.

- 8** Сравните числа.

- а) $(4 - \sqrt{10})^{\frac{1}{2}}$ и $(4 - \sqrt{10})^{\frac{2}{3}}$; в) $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}}$ и $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$; д) $(2 - \sqrt[3]{4})^{\frac{7}{2}}$ и $(2 - \sqrt[3]{4})^{\frac{5}{2}}$;
 б) $(\sqrt[4]{0,17})^{\frac{5}{3}}$ и $(\sqrt[4]{0,17})^{\frac{11}{8}}$; г) $(\sqrt[7]{0,1})^{-\frac{2}{3}}$ и $(\sqrt[7]{0,1})^{-\frac{3}{5}}$; е) $(\pi - 3)^{\frac{11}{12}}$ и $(\pi - 3)^{\frac{6}{7}}$.

- 9** Вычислите.

- а) $81^{\frac{3}{4}} + 8^{\frac{2}{3}}$; в) $144^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{2}{3}}$; д) $49^{\frac{3}{2}} - 64^{\frac{5}{6}}$;
 б) $36^{\frac{3}{2}} + 256^{\frac{1}{8}}$; г) $16^{\frac{5}{4}} - 25^{\frac{3}{2}}$; е) $125^{\frac{4}{3}} + 512^{\frac{4}{9}}$.

- 10** Выполните действия.

- а) $8^{\frac{5}{6}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$; в) $27^{\frac{17}{15}} : 27^{\frac{7}{15}}$; д) $1024^{\frac{4}{15}} \cdot 1024^{\frac{13}{30}}$;
 б) $9^{\frac{17}{28}} \cdot 9^{\frac{25}{28}}$; г) $16^{\frac{171}{56}} : 16^{\frac{101}{56}}$; е) $625^{\frac{11}{40}} \cdot 625^{\frac{19}{40}}$.

11 Выполните действия.

а) $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}}$; в) $x^{\frac{5}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$; д) $x^{\frac{9}{5}} \cdot x^{\frac{11}{5}}$;
б) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{12}}$; г) $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{5}{12}}$; е) $x^{\frac{5}{4}} : x^{\frac{1}{8}}$.

12 Выполните действия.

а) $(a+b)^{\frac{2}{3}} \cdot (a+b)^{\frac{1}{3}}$; в) $(2x)^{\frac{6}{7}} \cdot (4x)^{\frac{11}{7}}$;
б) $(x+1)^{\frac{3}{5}} : (x+1)^{\frac{3}{10}}$; г) $\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} : (9x)^{\frac{3}{4}}$.

13 Выполните действия.

а) $\left(16^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}}$; в) $\left(125^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{10}{12}}$;
б) $\left(25^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{4}}$; г) $\left(49^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{49}{28}}$.

14 Выполните действия.

а) $\left(z^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{8}{15}}$; в) $\left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{2}{3}}$; д) $\left(n^{\frac{17}{7}}\right)^{\frac{7}{5}}$;
б) $\left(x^{\frac{5}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(t^{\frac{19}{16}}\right)^{\frac{2}{3}}$; е) $\left(w^{\frac{2}{17}}\right)^{\frac{4}{9}}$.

15 Выполните действия.

а) $\left((2-\sqrt{3})^{\frac{2}{5}}\right)^{1,5}$; в) $\left((y+5x)^{2,4}\right)^{\frac{1}{6}}$;
б) $\left((r+t^2)^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{9}{10}}$; г) $\left((\sqrt{5}-2)^{\frac{5}{9}}\right)^{1,3}$.

16 Вычислите.

а) $\left(\frac{(6^{-3})^2 \cdot (6^3)^{-2}}{((6^3)^{-2})^{18}}\right)^{\frac{1}{48}}$; в) $\left(\frac{\left((2^3)^{-2}\right)^{-7} \left((4^{11})^{-44}\right)^{23}}{\left((16^{11})^3\right)^{-4}}\right)^{\frac{1}{10847}}$;

$$\text{б) } \left(\frac{\left((3^2)^{-3} \right)^3 \left((3^4)^{-2} \right)^4}{\left((9^3)^{-5} \right)^2} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad \text{г) } \left(\frac{\left((5^{12})^{-5} \right)^{-9} \left((25^3)^{-2} \right)^{12}}{\left((25^{12})^{-3} \right)^{-7} \left((125^{-2})^5 \right)^{-2}} \right)^{-\frac{1}{42}}.$$

17 Представьте в виде степени с основанием x .

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^5}}; & \text{в) } \sqrt[3]{\sqrt[7]{x^3} \sqrt[4]{x^3}}; & \text{д) } \sqrt[5]{x^4 \sqrt[4]{x^2} \sqrt[3]{x^3}}; \\ \text{б) } \left(x^3 \sqrt[5]{x^4} \right)^{\frac{2}{7}}; & \text{г) } \sqrt[11]{\sqrt[2]{x^{11} \sqrt{x^2}}}; & \text{е) } x^{2 \cdot 14} \sqrt{x^2} \sqrt[3]{\sqrt{x} \sqrt[5]{x^{20}}}. \end{array}$$

18 Упростите выражение

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{a^{\frac{7}{3}} - 2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}} + ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}} - ab^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b} : a^{\frac{1}{3}}; \\ \text{б) } \frac{x^{\frac{3}{11}} + x^{\frac{2}{11}} + \sqrt[11]{x} - 1}{x^{\frac{3}{11}} + \sqrt[11]{x} - 2} - \frac{2 \left(x^{\frac{3}{11}} + x^{\frac{2}{11}} + \sqrt[11]{x} \right)}{\left(\sqrt[11]{x} + 2 \right) \left(x^{\frac{3}{11}} + \sqrt[11]{x} - 2 \right)}; \\ \text{в) } \frac{\left(x^{\frac{5}{6}} - 2 \right) \left(x^{\frac{5}{6}} - 1 \right)}{\left(1 + x^{\frac{5}{6}} \right) \left(2 + x^{\frac{5}{6}} \right)} + \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{\left(1 + x^{\frac{5}{6}} \right) \left(2 + x^{\frac{5}{6}} \right)}; \\ \text{г) } \frac{2 + x^{\frac{1}{12}} - x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{24}} - x^{\frac{1}{8}}} + \frac{x^{\frac{1}{8}} + x^{\frac{5}{24}}}{x^{\frac{1}{4}} - x^{\frac{1}{6}}}. \end{array}$$

19 Докажите тождество.

$$\begin{array}{l} \text{а) } \left(a^{\frac{1}{6}} + c^{\frac{1}{3}} \right) \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{6}} c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}} \right) = \sqrt{a} + c; \\ \text{б) } \frac{\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{5}} \right) \left(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{5}} \right)}{a + b^{\frac{6}{5}}} \left(\frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{2}{5}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{5}}} + b^{\frac{2}{5}} \right) = \sqrt[3]{a} - \sqrt[5]{b^2}; \end{array}$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{a-b}^{\frac{12}{7}}}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}^{\frac{6}{7}} + b^{\frac{12}{7}}} + \frac{a^{\frac{5}{8}} - \sqrt{ab}^{\frac{3}{7}} + a^{\frac{3}{8}}b^{\frac{6}{7}} + \sqrt[8]{ab}^{\frac{12}{7}} + b^{\frac{15}{7}}}{\sqrt{ab}^{\frac{3}{7}} + \sqrt[4]{ab}^{\frac{9}{7}} + b^{\frac{15}{7}}} = \sqrt[8]{ab}^{\frac{3}{7}};$$

$$\text{г)} \frac{\left(a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{4}{9}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{9}}\right)}{\left(3a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{4}{9}} + b^{\frac{4}{3}}\right) \left(1 + \frac{a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{4}{9}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{9}}\right)}{3a^{\frac{4}{5}}b^{\frac{4}{9}} + b^{\frac{4}{3}}}\right)} \left(\frac{a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{9}}\right)}{a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{4}{9}}} + \frac{\left(a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{4}{9}}\right)b^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{9}}} \right) = 1.$$

20 Постройте график функции.

а) $y = 1, 2^x$;

в) $y = 1, 7^x$;

б) $y = 0, 8^x$;

г) $y = 0, 4^x$.

П

21 Вычислите.

$$\text{а)} \frac{49 \cdot 7^{\frac{2}{3}} \left(7^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{3}{5}}\right) \left(2^{\frac{3}{5}} + 7^{\frac{2}{3}}\right) \left(7^{-\frac{2}{3}} + \frac{2^{\frac{3}{5}}}{7^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{3}{5}}} + \frac{7^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{5}} + 7^{\frac{2}{3}}}\right)}{2\sqrt[5]{2} \left(7^{\frac{2}{3}} - 1\right) + 7\sqrt[3]{7} \left(1 + 7^{\frac{2}{3}}\right)};$$

$$\text{б)} \frac{2 \cdot 2^{\frac{4}{7}} \left(2\sqrt[7]{2} + 5 \cdot 5^{\frac{3}{5}}\right)}{2 \cdot 2^{\frac{5}{7}} - 125\sqrt[5]{5} + 5 \cdot 2^{\frac{4}{7}}5^{\frac{3}{5}}} - \frac{2 \cdot 2^{\frac{5}{7}} + 125\sqrt[5]{5} + 5 \cdot 2^{\frac{4}{7}}5^{\frac{3}{5}}}{2 \cdot 2^{\frac{5}{7}} - 125\sqrt[5]{5} + 5 \cdot 2^{\frac{4}{7}}5^{\frac{3}{5}}};$$

$$\text{в)} \frac{1 + 17^{\frac{1}{3}} - 17^{\frac{4}{3}} + 13^{\frac{1}{4}} + 2 \left(13^{\frac{1}{4}}\right)^4 - 17^{\frac{1}{3}} \left(13^{\frac{1}{4}}\right)^4 + 13^{\frac{5}{4}} + \left(17^{\frac{1}{3}}\right)^3 \left(2 + 13^{\frac{1}{4}}\right)}{2 - 17^{\frac{1}{3}} + 13^{\frac{1}{4}}} + \frac{17^{\frac{1}{3}} + 13^{\frac{1}{4}} + 1}{17^{\frac{1}{3}} - 13^{\frac{1}{4}} - 2};$$

$$\text{г)} \left(\sqrt{\frac{3}{\left(3(9+2\sqrt{114})\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{53^{\frac{2}{3}}}{(9+2\sqrt{114})^{\frac{1}{3}}}}} \right)^{-6} + 5 \left(\sqrt{\frac{3}{\left(3(9+2\sqrt{114})\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{53^{\frac{2}{3}}}{(9+2\sqrt{114})^{\frac{1}{3}}}}} \right)^{-2}.$$

22 Упростите числовое выражение.

а) $\frac{1}{7^{0,5} - 6^{0,5}} - \frac{4}{7^{0,5} + 3^{0,5}} - \frac{3}{6^{0,5} - 3^{0,5}};$

б) $\frac{2^{0,2}}{2^{0,2} - 3 + 3^{\frac{1}{3}}} + \frac{2^{0,2}}{3 + 2^{0,2} + 3^{\frac{1}{3}}} - 2 \frac{2^{\frac{1}{5}} \left(2^{\frac{1}{5}} + 3^{\frac{1}{3}} \right)}{2^{0,4} + 2 \cdot 2^{0,2} 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} - 9}.$

23 Упростите.

а) $\frac{\left(a^{-\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \right)^2 + \left(a^{-\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} - \sqrt[3]{b^{-1}} \right) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{ab} \right)} - 2a + \frac{4a^2}{a-b};$

б) $\frac{\left(a^{\frac{1}{10}} + b^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \left(1 + a^{\frac{1}{10}} + b^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{3}{10}} + b^2} + \frac{a^{\frac{1}{10}} \left(a^{\frac{1}{10}} + b^{\frac{2}{3}} \right) \left(a^{\frac{1}{10}} + a^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{10}} b^{\frac{2}{3}} + \left(b^{\frac{2}{3}} - 2 \right) b^{\frac{2}{3}} \right) + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{10}} b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{8}{3}}}.$

24. Одиннадцатиклассник Вася считает, что $a^{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[3]{a}$ — это одно и то же, а его одноклассница Варя говорит, что он серьёзно заблуждается. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ.

25. Упростите числовое выражение: $\left(9 + 80^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(9 - 80^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}.$

M

26 Упростите выражение.

а) $3 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \left(2 + 3^{\frac{1}{3}} \right) - 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \left(2 + 3^{\frac{1}{3}} \right)^2 + \left(2 + 3^{\frac{1}{3}} \right)^3;$

б) $\frac{\left(2 + 5^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 6 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \left(2 + 5^{\frac{2}{3}} \right)}{\left(1 + 6^{\frac{2}{3}} \right)^3 - 3 \cdot 6^{\frac{2}{3}} \left(1 + 6^{\frac{2}{3}} \right)};$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad & \frac{\left(\frac{1}{3^{0,04}} + \frac{1}{3^{0,02}} - 1\right)\left(\frac{1}{3^{0,02}} + \frac{1}{3^{0,01}} - 1\right)}{\left(\frac{1}{3^{0,06}} + \frac{1}{3^{0,04}} - 1\right)\left(\frac{1}{3^{0,01}} + \frac{1}{3^{0,02}} - 1\right)} + \frac{\left(\frac{1}{3^{0,02}} - 1\right)\left(\frac{\frac{1}{3^{0,05}} + \frac{1}{3^{0,04}} + \frac{2}{3^{0,03}} + \frac{1}{3^{0,01}} - 1}{3^{0,01}} - 1\right)}{3^{0,01}\left(-1 + \frac{1}{3^{0,06}} + \frac{1}{3^{0,04}}\right)\left(-1 + \frac{1}{3^{0,03}} + \frac{1}{3^{0,02}}\right)}; \\
 \text{г)} \quad & \frac{\left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} + \left(\frac{8}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}.
 \end{aligned}$$

27. Упростите числовое выражение: $\frac{(4 + \sqrt{15})^{1,5} + (4 - \sqrt{15})^{1,5}}{(6 + \sqrt{35})^{1,5} - (6 - \sqrt{35})^{1,5}}.$

1.5*. Предел последовательности

Для того чтобы более подробно и строго разобрать вопрос о степени действительного положительного числа с иррациональным показателем, затронутый в конце предыдущего параграфа, нам понадобится понятие предела последовательности.

Последовательностями вы довольно много занимались в курсе алгебры девятого класса, изучая главу IV «Последовательности и прогрессии». Напомним, что последовательностью называется функция, областью определения которой является множество всех натуральных чисел (говорят также «функция натурального аргумента»). В отличие от остальных функций, у последовательностей аргумент принято записывать не в скобках после имени функции, а в виде индекса: пишут не $f(n)$ или $y(n)$, а соответственно f_n или y_n .

С понятием предела функции на бесконечности вы знакомы из курса алгебры и начал математического анализа десятого класса, из параграфа 4.3.

Напомним определение предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$:

Мы говорим, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Напомним также: тот факт, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ записывается либо так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, либо так: $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$.

Абсолютно аналогично вводится определение предела последовательности. Заметим только, что поскольку аргумент n последовательности – натуральное число, то он положителен и принято писать не $n \rightarrow +\infty$, а просто $n \rightarrow \infty$.

Говорим, что число A является пределом последовательности (x_n) при $n \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $n > p$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A является пределом последовательности (x_n) при $n \rightarrow \infty$ записывается либо так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, либо так: $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Многие результаты, полученные для пределов функции на бесконечности, переносятся с соответственными небольшими изменениями, в основном, касающимися обозначений, на пределы последовательностей.

Скажем, рассуждение, с помощью которого в параграфе 4.3 учебника для 10 класса было установлено, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, практически без существенных изменений позволяет записать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Имеет место теорема о единственности предела последовательности:

Если последовательность (x_n) имеет предел при $n \rightarrow \infty$, то этот предел единственный.

Кстати, поскольку предел последовательности может существовать только при $n \rightarrow \infty$ (в отличие от произвольной функции, где можно говорить о пределе при $x \rightarrow +\infty$, при $x \rightarrow -\infty$, а также при $x \rightarrow t$, где t – действительное число), то для последовательности часто говорят просто «имеет предел», не произнося (но имея в виду) «при $n \rightarrow \infty$ ». Скажем, краткая формулировка предыдущей теоремы такая: «Если последовательность имеет предел, то он единственный».

Для последовательностей также имеют место теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного:

Пусть существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$. Тогда:

- 1) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B$;
- 2) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = A - B$;
- 3) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = AB$;
- 4) если $B \neq 0$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательства этих теорем в основных деталях аналогичны доказательствам теорем для функций при $x \rightarrow +\infty$ и рассматривать их здесь мы не будем.

Вспомним известные вам из курса алгебры девятого класса определения возрастающей и убывающей последовательностей:

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если для любого номера n выполнено неравенство $a_{n+1} > a_n$.

Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если для любого номера n выполнено неравенство $a_{n+1} < a_n$.

Можно сказать так: последовательность возрастающая, если каждый следующий член этой последовательности больше предыдущего; последовательность убывающая, если каждый следующий член этой последовательности меньше предыдущего.

Если в приведённых выше определениях записать знаки нестрогих неравенств, то получим определения соответственно неубывающей и невозрастающей последовательностей:

Последовательность (a_n) называется *неубывающей*, если для любого номера n выполнено неравенство $a_{n+1} \geq a_n$.

Последовательность (a_n) называется *невозрастающей*, если для любого номера n выполнено неравенство $a_{n+1} \leq a_n$.

Общее название возрастающих или убывающих (а также невозрастающих или неубывающих) последовательностей – *монотонные*. Для установления монотонности последовательности обычно рассматривают разность двух соседних её членов и выясняют знак этой разности.

Докажем, например, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{n}{2n+3}$, возрастающая.

$$\text{У нас: } a_n = \frac{n}{2n+3}; a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+1}{2n+5}.$$

Рассмотрим разность $a_{n+1} - a_n$ и преобразуем её:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{2n+5} - \frac{n}{2n+3} = \frac{(n+1)(2n+3) - n(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \\ &= \frac{(2n^2 + 3n + 2n + 3) - (2n^2 + 5n)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{3}{(2n+5)(2n+3)} > 0 \end{aligned}$$

Установлено, что $a_{n+1} - a_n > 0$, следовательно, $a_{n+1} > a_n$, что и требовалось доказать.

Иногда для последовательности с положительными членами удобнее рассматривать не разность соседних членов, а их отношение и сравнивать его с единицей.

Докажем таким способом, что последовательность, заданная формулой $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, убывающая.

Выписав $b_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$, рассмотрим отношение $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ и преобразуем его:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= b_n : b_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n} : \frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2}. \end{aligned}$$

Если теперь применить к выражению $\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2}$ формулу бинома Ньютона, известную вам из курса алгебры и начал математического анализа десятого класса, то получим, что $\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} = 1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n^2 + 2n} + \dots > 1 + \frac{n+2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$, поскольку слагаемые, отмеченные многоточием, положительны.

Вернёмся к преобразованию нашего отношения:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Итак, установлено, что $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$, а поскольку $b_{n+1} > 0$, из этого следует, что $b_n > b_{n+1}$, т.е. последовательность (b_n) убывающая.

Рассмотрим ещё два понятия, связанные с последовательностью:

Последовательность (a_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое действительное число M , что при всех натуральных n выполняется неравенство $a_n \leq M$.

Последовательность (a_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое действительное число m , что при всех натуральных n выполняется неравенство $a_n \geq m$.

Можно сказать так: последовательность ограничена сверху, если все её члены меньше некоторого числа; последовательность ограничена снизу, если все её члены больше некоторого числа.

Последовательность, ограниченная одновременно и сверху, и снизу, называется *ограниченной*. Можно сказать, что все члены ограниченной последовательности принадлежат некоторому отрезку числовой прямой.

Для последовательностей, имеющих предел, справедлива такая теорема, называемая *необходимым условием существования предела*:

Последовательность, имеющая предел, ограничена.

На основании этой теоремы понятно, что неограниченная последовательность не может иметь предела. Однако не всякая ограниченная последовательность имеет предел.

Докажем, что последовательность, заданная формулой $h_n = (-1)^n$, ограниченная, но не имеет предела.

Эта последовательность устроена очень просто: все её члены с нечётными номерами равны -1 , а все члены с чётными номерами равны 1 . Понятно, что при всех натуральных n выполняется неравенство $-2 < h_n < 2$, из которого и следует ограниченность последовательности (h_n) .

Предположим, что последовательность (h_n) имеет предел, равный A . Возьмём $\varepsilon = 0,1$. Тогда найдётся такое действительное число p , что при всех $n > p$ выполняется неравенство $|h_n - A| < 0,1$, или $A - 0,1 < h_n < A + 0,1$. Другими словами, все члены последовательности (h_n) с номерами, большими, чем p , лежат внутри интервала $(A - 0,1; A + 0,1)$. А поскольку, каким бы ни было число p , имеются и

чётные, и нечётные натуральные числа, большие него, то внутри этого интервала должны лежать одновременно обе точки -1 и 1 . Но это невозможно, т.к. длина интервала равна $0,2$, а расстояние между точками -1 и 1 равно 2 . Таким образом, доказано, что последовательность $h_n = (-1)^n$ предела не имеет.

Сформулируем без доказательства одну из центральных теорем математического анализа – теорему Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности.

Возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.

Точно так же:

Убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел.

Наконец, поскольку возрастающая последовательность автоматически ограничена снизу своим первым членом, и аналогично убывающая последовательность автоматически ограничена сверху своим первым членом, можно сказать так:

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Рассмотрим пример. Ранее в этом параграфе мы установили, что последовательность, заданная формулой $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, убывающая. Эта последовательность ограничена снизу, поскольку все её члены положительны. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ этой последовательности.

Оказалось, что этот предел является иррациональным числом, приближённо равным $2,718281828459045\dots$ Это число играет важнейшую роль в математике (ничуть не меньшую, чем другое известное вам знаменитое иррациональное число π). Это число также принято обозначать буквой – а именно латинской буквой e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Правда в большинстве ситуаций число e удобнее записывать в виде другого предела. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$. Действительно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e : (1+0) = e,$$

поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

А т.к. $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, то полученный результат принято записывать в виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Этот предел называется *вторым замечательным пределом*^{*} и играет очень важную роль в математике.

С помощью теоремы Вейерштрасса устанавливается много других важных математических результатов. Рассмотрим, например, вопрос о длине окружности.

Рассмотрим правильный n -угольник, вписанный в окружность радиуса R . Из курса геометрии девятого класса вы знаете, что длина a_n стороны этого правильного n -угольника выражается формулой $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, а его периметр P_n выражается формулой $P_n = 2nR \sin \frac{180^\circ}{n}$.

В учебнике геометрии для 9 класса по поводу длины окружности говорится следующее: Длиной окружности называется число, к которому стремятся периметры вписанных в эту окружность правильных многоугольников, когда количество их сторон неограниченно увеличивается.

На уже известном нам языке пределов это можно записать так: Длина c окружности радиуса R равна пределу $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2nR \sin \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{180^\circ}{n}\right)$.

Возникает два вопроса:

- Существует ли этот предел?
- Если этот предел существует, то как его вычислить?

Сейчас мы попробуем ответить на оба эти вопроса.

Последовательность P_n периметров вписанных правильных многоугольников является возрастающей. Она является также ограниченной сверху (хотя бы потому, что периметр любого вписанного в окружность многоугольника меньше, скажем, периметра описанного около этой окружности квадрата). Таким образом, искомый предел существует по теореме Вейерштрасса.

Для его вычисления воспользуемся первым замечательным пределом. Поскольку в первом замечательном пределе речь идёт о синусе действительного числа, а синусом действительного числа x называется синус угла величиной x радиан,

^{*} Напомним, что в 10 классе вы изучали также *первый замечательный предел*: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

перейдём в нашем пределе к радианной мере: $c = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} \right)$.

Выполним замену переменной по формуле $\frac{\pi}{n} = x$. Тогда, во-первых, при $n \rightarrow \infty$ будет $x \rightarrow 0$, а во-вторых, $n = \frac{\pi}{x}$ и поэтому получим:

$$c = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} \right) = 2R \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{x} \sin x \right) = 2\pi R \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2\pi R \cdot 1 = 2\pi R.$$

Мы вывели давно известную нам формулу для нахождения длины окружности.

Аналогично выводится формула для вычисления площади круга как предела последовательности площадей вписанных правильных n -угольников при $n \rightarrow \infty$. Эта последовательность тоже возрастающая и ограниченная сверху, значит, указанный предел существует по теореме Вейерштрасса.

Наконец, займёмся применением теоремы Вейерштрасса к вопросу о степени действительного положительного числа с иррациональным показателем, который мы затронули в предыдущем параграфе.

Для начала рассмотрим ситуацию, когда основание a – действительное число, большее единицы. Пусть x – иррациональное число. Рассмотрим приближения числа x десятичными дробями с недостатком и с избытком. Пусть y_n и z_n – десятичные приближения иррационального числа x до n -го знака после запятой с недостатком и с избытком соответственно. Тогда, как было отмечено в параграфе 1.4, выполнены неравенства

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq \dots \text{ и } \dots \leq z_4 \leq z_3 \leq z_2 \leq z_1.$$

Кроме того, для монотонных и ограниченных последовательностей (y_n) и (z_n) существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$.

Далее, было установлено на основании свойств степеней с действительным основанием, большим единицы, и рациональными показателями, что

$$a^{y_1} \leq a^{y_2} \leq a^{y_3} \leq a^{y_4} \leq \dots \text{ и } \dots \leq a^{z_4} \leq a^{z_3} \leq a^{z_2} \leq a^{z_1}.$$

Другими словами, последовательность (a^{y_n}) является неубывающей и ограниченной сверху, например, числом a^{z_1} . Значит, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$. Именно этот предел и называется степенью числа $a > 1$ с иррациональным показателем x , т.е. $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$.

После такого определения для удобства дальнейшей работы полезны следующие замечания:

1) Можно было бы рассмотреть последовательность (a^{z_n}) , которая является невозрастающей и ограниченной снизу, например, числом a^{y_1} . По теореме

Вейерштрасса существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$. Степенью числа $a > 1$ с иррациональным показателем x можно было бы назвать этот предел, т.е. положить по определению $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$. Можно доказать, что оба предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{z_n}$ равны друг другу, т.е. определение a^x корректно с помощью любого из этих пределов.

2) Можно взять не только последовательность десятичных приближений иррационального числа x до n -го знака после запятой с недостатком, а любую монотонно неубывающую последовательность (y_n) рациональных чисел, такую что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$, и определить степень числа $a > 1$ с иррациональным показателем x с помощью предела $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$; мы пришли бы к тому же результату.

В случае, когда основание a – действительное положительное число, меньшее единицы, а x – иррациональное число, то точно так же рассматривая приближения до n -го знака после запятой числа x десятичными дробями y_n с недостатком, мы получим, что при $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4 \leq \dots$ и основании $a \in (0; 1)$ будут выполняться неравенства $a^{y_1} \geq a^{y_2} \geq a^{y_3} \geq a^{y_4} \geq \dots$, т.е. последовательность (a^{y_n}) является невозрастающей. В то же время она ограничена снизу любым числом a^z , где z – рациональное приближение иррационального числа x с избытком. Значит, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$, который по определению и называется степенью числа $a \in (0; 1)$ с иррациональным показателем x , т.е. $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$.

Таким образом, мы определили степень действительного положительного числа и с рациональным, и с иррациональным, т.е. с любым действительным показателем.

Как и следовало ожидать, при всех действительных положительных a и b и при всех действительных x и y остаются справедливыми привычные нам формулы преобразования степеней:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;
- 3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
- 4) $a^x : b^x = (a:b)^x$;
- 5) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Для доказательства, скажем, первой из них в случае $a > 1$ рассмотрим неубывающие последовательности рациональных чисел (x_n) и (y_n) , такие что

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Тогда $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$; $a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n}$ и с учётом того, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$, имеем:

$$a^x \cdot a^y = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{x_n} \cdot a^{y_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n + y_n} = a^{x+y}.$$

Случай $a \in (0; 1)$ рассматривается аналогично, и тем самым формула 1 доказана.

Похожими рассуждениями доказываются и другие формулы.

Н

- 1 а) Что называется числовой последовательностью?
- б) В каком случае числовая последовательность называется возрастающей? убывающей?
- в) В каком случае числовая последовательность называется невозрастающей? неубывающей?
- 2 а) Что значит, что последовательность ограничена сверху? снизу?
- б) Что значит, что последовательность ограничена?
- 3 а) Дайте определение предела последовательности.
- б) Каково необходимое условие существования предела последовательности?
- 4 а) Какой предел называют вторым замечательным пределом?
- б) Какой предел называют первым замечательным пределом?
- 5 а) Верно ли, что если последовательность ограничена и возрастает, то она имеет предел?
- б) Верно ли, что если последовательность убывает она имеет предел?
- в) Верно ли, что если последовательность монотонна, то она имеет предел?
- 6 Какой является последовательность (возрастающей или убывающей)?

а) $a_n = n$;	в) $a_n = \frac{1}{n}$;	д) $a_n = 2 - 3n$;
б) $a_n = -n^2$;	г) $a_n = n^3 + n$	е) $a_n = \frac{3}{4} + \frac{2n}{3}$.
- 7 Какой является последовательность (невозрастающей или неубывающей)?

а) $a_n = (n-1)(n-2)$;	в) $a_n = n^2 - 11n + 30, n \geq 5$;
б) $a_n = -n(n-1)(n-2)$;	г) $a_n = 13n - n^2 - 42, n \geq 6$.

8 Докажите, что следующие последовательности ограничены сверху числом A , а снизу числом $-A$.

а) $a_n = \frac{2}{n}, \quad A = 3;$

в) $a_n = \frac{n}{4n+1}, \quad A = \frac{1}{4};$

б) $a_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad A = \frac{3}{2};$

г) $\frac{5-n}{n+\frac{5}{2}}, \quad A = 2.$

9 Докажите, что для следующих последовательностей выполнено необходимое условие существования предела.

а) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+4};$

в) $a_n = \frac{\cos n}{n};$

б) $a_n = \frac{n-\sqrt{2}}{n^2-2};$

г) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$

10 Используя определение предела последовательности, докажите равенства.

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3};$

в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n-5} = \frac{3}{2};$

б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n-2,5} - \frac{1}{n+2} \right) = 0;$

г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{n^3} = 0.$

11 Найдите такой минимальный номер $m \in N$, начиная с которого члены последовательности $a_n = \frac{4n^2+1}{2n^2+5}$ отличаются от своего предельного значения, равного 2, менее чем на 0,1; 0,01; 0,001.

12 Найдите такой минимальный номер $m \in N$, начиная с которого члены последовательности $a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{n^2+3}$ отличаются от своего предельного значения, равного 2, менее чем на 0,05; 0,002; 0,0005.

13 Угадайте пределы последовательностей и докажите свою правоту, используя определение предела последовательности.

а) $a_n = \frac{2}{n+2};$

в) $a_n = \frac{1-n}{2-n};$

б) $a_n = \frac{2n}{2n+5};$

г) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$

14 Угадайте пределы последовательностей и докажите свою правоту, используя определение предела последовательности.

а) $a_n = \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}$; в) $a_n = \frac{n(n+1)}{n(2n+1)}$;

б) $a_n = \frac{2n^2 - n}{n^2}$; г) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$.

15 Докажите, что последовательность, заданная рекуррентно $a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{2}$, $a_1 = 2$, имеет предел и найдите его.

16 Докажите, что для последовательности, заданной рекуррентно $a_{n+1}a_n = 1$, $a_1 = 3$, выполнено необходимое условие существования предела последовательности, но при этом она не имеет предела.

17 Докажите, что следующие последовательности убывающие.

а) $x_n = \frac{2n-2}{3n^2+1}, n \geq 2$; б) $x_n = \frac{n+5}{n^3+2}$.

II

18 Докажите, что последовательность (x_n) не является ограниченной ни сверху, ни снизу.

а) $x_n = (-1)^n n$; в) $x_n = n^2 \cos \pi n$;
б) $x_n = (-1)^n \sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{-n}$; г) $x_n = n \cos \pi n + n^2 \sin \frac{\pi n}{2}$.

19 Используя первый замечательный предел, докажите, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$.

20 Используя результат задачи 19, найдите пределы.

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$; в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(1 - \cos^2 \frac{1}{n} \right)$;
б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\cos^2 \frac{1}{n} - \sin^2 \frac{1}{n} \right) \sin \frac{2}{n}$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\cos \frac{3}{n}} \left(\sin \frac{4}{n} - \sin \frac{2}{n} \right)$.

21 Используя второй замечательный предел, найдите пределы последовательностей.

а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$;

в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$;

б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;

г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

22. Докажите, что если существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, то:

а) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B$;

б) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = A - B$;

в) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = AB$;

г) при $B \neq 0$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$, причём $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

M

23 Докажите, что:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$.

24. Докажите теорему о единственности предела последовательности.

25. Докажите существование второго замечательного предела непосредственно, установив, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастающая и ограниченная сверху.

26. Выведите формулу для вычисления площади круга как предела последовательности площадей вписанных правильных n -угольников при $n \rightarrow \infty$.

27. а) Докажите, что площади описанных правильных n -угольников образуют убывающую ограниченную снизу последовательность.

б) Докажите, что эта последовательность имеет предел и вычислите его.

в) Сравните полученный результат с результатом предыдущей задачи.

28 Найдите пределы.

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

1.6. Логарифмы

Если рассмотреть график показательной функции $y = a^x$ (рис. 1.10–1.13), то зная значения аргумента x , с его помощью можно найти соответствующее значения функции. Во многих ситуациях приходится решать обратную задачу: зная положительное число u , искать такое число x , для которого степень a^x равнялась бы числу u . Это можно сделать с помощью того же графика $y = a^x$. Если мы проведём прямую $y = u$, параллельную оси Ox , найдём точку её пересечения с графиком $y = a^x$, то абсцисса найденной точки и даст ответ на интересующий нас вопрос. Видно, что искомое число x можно найти для любого положительного u , причём единственное. А вот при $u \leq 0$ такого числа x не существует.

Число x , которое мы искали, имеет специальное название.

Логарифмом положительного числа u по положительному основанию a , отличному от единицы, называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число u .

Обозначается логарифм числа u по основанию a следующим образом: $\log_a u$.

Эту запись можно прочесть ещё и так: «логарифм по основанию a от u ».

По определению логарифма выражение $\log_a u$ имеет смысл при $u > 0$; $a > 0$; $a \neq 1$.

Таким образом, область допустимых значений выражения $\log_a u$ задаётся весьма обширной системой требований:

$$\begin{cases} u > 0; \\ a > 0; \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Это обстоятельство будет усложнять решение некоторых задач, связанных с логарифмами.

Итак, когда мы пишем, что $\log_a u = t$, то это значит, что $a^t = u$, а также выполняются упомянутые ограничения.

Для компонент выражения $\log_a u$ используются следующие наименования: a называется *основанием логарифма*, а u – *подлогарифмическим выражением*.

Если задаться вопросом: «Как называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число u ?», затем ответить на него: « $\log_a u$ » и записать этот ответ в показателе той самой степени, то получим запись:

$$a^{\log_a u} = u,$$

которая является не чем иным, как записанным в такой несколько необычной форме определением логарифма. Эта формула называется также *основным логарифмическим тождеством*.

Первые примеры вычисления логарифмов в простых случаях обычно выполняются без особых трудностей:

$\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$ (положительность чисел 8 и 2, а также то, что $2 \neq 1$, в заданиях такого типа настолько очевидны, что даже не обсуждаются). Кроме того, мы с самого начала видели, что логарифм, если он существует, единственный, находится однозначно.

$\log_{17} 1 = 0$, потому что $17^0 = 1$.

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$, потому что $3^{-1} = \frac{1}{3}$.

$\log_9 3 = \frac{1}{2}$, потому что $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

В то же время вряд ли удастся быстро вычислить, скажем, $\log_{128} 16$, хотя немного позже мы научимся это делать. Но самое важное – понимать, что если написать логарифм наугад, скажем, $\log_5 11$, то точно вычислить его, скорее всего, не удастся – точно так же, как исключительно редко удаётся точно найти числовые значения большинства корней, синусов, и т.д. В то же время, приближённые значения логарифмов (как и корней, синусов, и т.д.) можно находить с помощью специализированного калькулятора или компьютера.

Исторически так сложилось, что для логарифмов по двум конкретным числовым основаниям используются специальные обозначения, а сами эти логарифмы имеют особые названия.

Логарифм числа x по основанию 10 обозначается не традиционно $\log_{10} x$ (хотя и так тоже можно писать при желании), а $\lg x$ и называется *десятичным логарифмом*.

Логарифм числа x , основанием которого является изученное в предыдущем параграфе иррациональное число e , обозначается не традиционно $\log_e x$ (хотя и так тоже можно писать при желании), а $\ln x$ и называется *натуральным логарифмом*.

Выведем ряд формул для выполнения тождественных преобразований выражений, содержащих логарифмы.

Начнём с двух очень простых формул:

Для любого положительного числа a , отличного от единицы:

$\log_a 1 = 0$;	$\log_a a = 1$.
------------------	------------------

Первое равенство следует из того, что $a^0 = 1$, а второе – из того, что $a^1 = a$.

Теперь докажем две очень важные формулы:

Если x, y и a – любые положительные числа, причём $a \neq 1$, то:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy;$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}.$$

Обычно первую из этих формул читают так: «Сумма двух логарифмов [по одному основанию] равна логарифму произведения [по тому же основанию]». При этом для быстроты текст, содержащийся в квадратных скобках, часто не произносится (но всегда имеется в виду). Аналогично читают и вторую формулу: «Разность двух логарифмов [по одному основанию] равна логарифму частного [по тому же основанию]».

Для доказательства первой формулы обозначим $\log_a x = u$; $\log_a y = v$; $\log_a xy = t$. Тогда $a^u = x$; $a^v = y$; $a^t = xy$. Теперь, перемножая два первых равенства, имеем: $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$. Но из третьего равенства $xy = a^t$, т.е. $a^{u+v} = a^t$. Поскольку показательная функция монотонная, отсюда следует, что $u + v = t$, т.е. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и вторая формула.

Теперь рассмотрим формулу, связывающую логарифм с операцией возведения в степень, а также несколько её следствий.

Если x и a – любые положительные числа, причём $a \neq 1$,
а m и n – любые действительные числа, $n \neq 0$, то:

$$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x.$$

Для доказательства обозначим $\log_a x = u$, а $\log_{a^n} x^m = v$. Тогда $a^u = x$; $(a^n)^v = x^m$. Из второго равенства имеем: $x^m = (a^n)^v = a^{nv}$. Возводя обе части равенства $a^u = x$ в степень m , получим: $x^m = (a^u)^m = a^{um}$. Таким образом, $a^{nv} = a^{um}$, а поскольку показательная функция монотонная, отсюда следует, что $nv = um$, или $v = \frac{um}{n} = \frac{m}{n} \cdot u$. Теперь подставляя в доказанное равенство $v = \log_{a^n} x^m$ и $u = \log_a x$, получаем требуемое $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$.

Первое следствие доказанной формулы получим, взяв $n = 1$:

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x.$$

Читается эта формула обычно так: «Показатель степени в подлогарифмическом выражении можно выносить за знак логарифма в качестве множителя, если основание этой степени – положительное число».

Обратите особое внимание! Здесь очень важна часть формулировки, начинающаяся со слова «если». Несоблюдение указанного в ней требования может привести к грубейшим ошибкам. Например, если при преобразовании логарифма $\log_a x^2$ нам известно из каких-нибудь источников, что $x > 0$, то можно смело писать: $\log_a x^2 = 2\log_a x$. Но если такой информации нет, и x может принимать отрицательные значения, то записав машинально вместо выражения $\log_2 x^2$ выражение $2\log_2 x$, мы обнаруживаем, что, скажем, при $x = -2$, преобразуемое выражение имеет смысл (и равно 2), а то, что мы записали, смысла не имеет.

Второе следствие доказанной формулы получим, взяв $m = 1$:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x.$$

Прочитать полученный результат можно так: «Показатель степени в основании логарифма можно выносить за знак логарифма в качестве делителя, если основание этой степени – положительное число». Здесь тоже важное значение имеет заключительная часть фразы.

Наконец, третье следствие доказанной формулы получится, если $m = n$:

$$\log_{a^n} x^n = \log_a x.$$

Прочитать полученный результат можно так: «Если основание логарифма и подлогарифмическое выражение возвести одновременно в одинаковую степень, то значение логарифма не изменится».

Скажем, если в логарифме $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ возвести основание и подлогарифмическое выражение в квадрат, то получим: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \log_2 3$. Или возводя в логарифме $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$ основание и подлогарифмическое выражение в степень -1 , получим: $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7} = \log_5 7$.

Рассмотрим несколько примеров работы с доказанными формулами.

Пример 1. Упростите выражение $\log_6 4 + 2\log_6 3$.

Решение.

$$\log_6 4 + 2\log_6 3 = \log_6 4 + \log_6 3^2 = \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \cdot 9) = \log_6 36 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 2. Найдите значение выражения $\log_3 (9b)$, если известно, что $\log_3 b = 5$.

Решение. $\log_3(9b) = \log_3 9 + \log_3 b = 2 + \log_3 b = 2 + 5 = 7$.

Ответ: 7.

Пример 3. Вычислите: $\log_{128} 16$.

Решение. Воспользуемся тем, что и основание логарифма, и подлогарифмическое выражение – степени одного и того же числа 2, а именно: $128 = 2^7$, а $16 = 2^4$. Имеем:

$$\log_{128} 16 = \log_{2^7} 2^4 = \frac{4}{7} \cdot \log_2 2 = \frac{4}{7} \cdot 1 = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{4}{7}$.

Пример 4. Упростите выражение $\log_{0,2} \frac{1}{8+2\sqrt{15}} + \log_{\sqrt{5}} \frac{25}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Решение. Записав первый логарифм в виде $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8+2\sqrt{15}}$ и применив для его преобразования формулу $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ при $n = -1$, т.е. формулу $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$,

$$\text{получим: } \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{8+2\sqrt{15}} \right) = \log_5 (8+2\sqrt{15}).$$

Затем, применив ко второму логарифму ту же формулу $\log_a b = \log_{a^n} b^n$, но при $n = 2$; получим:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{5}} \frac{25}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \log_{(\sqrt{5})^2} \left(\frac{25}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \right)^2 = \log_5 \frac{625}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2} = \\ &= \log_5 \frac{625}{5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3} = \log_5 \frac{625}{8 + 2\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\log_{0,2} \frac{1}{8+2\sqrt{15}} + \log_{\sqrt{5}} \frac{25}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \log_5 (8+2\sqrt{15}) + \log_5 \frac{625}{8+2\sqrt{15}} = \log_5 625 = 4.$$

Ответ: 4.

Ещё одна важная логарифмическая формула получается при попытке разобраться со следующей ситуацией. Предположим, у нас имеется логарифм по основанию a . По каким-то причинам нас это основание не устраивает, и мы хотели бы записать наш логарифм по другому основанию, скажем, c . Возможно ли это?

Ответ на поставленный вопрос следующий: «Возможно, но уже не в виде одного логарифма по нужному нам основанию, а виде частного двух таких логарифмов».

Эта формула называется *формулой перехода к новому основанию*:

Если x и a – любые положительные числа, причём $a \neq 1$,
 c – любое положительное число, причём $c \neq 1$, то:

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Для доказательства обозначим $\log_a x = u$; $\log_c x = z$; $\log_c a = t$, причём $t \neq 0$, поскольку $a \neq 1$. Тогда $a^u = x$; $c^z = x$; $c^t = a$. Теперь имеем на основании первого и третьего равенств: $x = a^u = (c^t)^u = c^{tu}$. Но из второго равенства $x = c^z$, откуда заключаем, что $c^{tu} = c^z$, а т.к. показательная функция монотонна, то $tu = z$. Разделив обе части этого равенства на $t \neq 0$, получаем: $u = \frac{z}{t}$, или вспоминая наши обозначения, $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$, что и требовалось доказать.

Если переписать формулу перехода к новому основанию в виде $\frac{\log_c x}{\log_c a} = \log_a x$, то её можно трактовать как формулу для преобразования частного двух логарифмов по одному основанию в один логарифм.

Рассмотрим важное следствие формулы перехода к новому основанию.

Если взять в этой формуле $c = x$, то получим: $\log_a x = \frac{\log_x x}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x a}$.

Итак, доказана формула:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

Её обычно трактуют следующим образом: «Если в логарифме поменять местами основание и подлогарифмическое выражение, то логарифм заменится на обратное число». Многие ребята любят произносить конец этой фразы образно: ... то логарифм «перевернётся». Ещё одна трактовка такова: «Числа $\log_a x$ и $\log_x a$ – взаимно обратные».

Удобно также переписать эту формулу в виде $\frac{1}{\log_x a} = \log_a x$ и трактовать её как формулу для упрощения дроби, числитель которой единица, а знаменатель – логарифм.

Рассмотрим две более сложные формулы.

В самом начале параграфа обсуждалось основное логарифмическое тождество $a^{\log_a u} = u$. Это единственная имеющаяся у нас формула для преобразования

выражений, содержащих логарифм в показателе степени. При этом сфера её действия существенно ограничена требованием, чтобы основание степени и основание логарифма совпадали. Во встречающихся задачах это не всегда так, и иногда приходится проявлять изобретательность, чтобы приспособить ситуацию под основное логарифмическое тождество.

Пример 5. Упростите: $16^{\log_8 5}$.

Решение.

$$16^{\log_8 5} = (2^4)^{\log_2 3 \cdot 5} = (2^4)^{\frac{1}{3} \log_2 5} = 2^{4 \cdot \frac{1}{3} \log_2 5} = 2^{\frac{4}{3} \log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} = 5^{1 + \frac{1}{3}} = 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5\sqrt[3]{5}.$$

Ответ: $5\sqrt[3]{5}$.

Возникает естественный вопрос: «Нельзя ли придумать формулу для упрощения выражения $a^{\log_b c}$ при любых допустимых значениях входящих в него букв?» Ответ на него следующий: «Имеется формула, позволяющая записать это выражение в другом виде. При этом иногда происходит упрощение, а иногда нет». Вот эта формула:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Запоминать её удобно так: «В выражении $a^{\log_b c}$ крайние буквы можно менять местами».

Доказательство начнём с того, что перейдём в логарифме, стоящем в показателе степени, к основанию a . Получим:

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = a^{\log_a c \cdot \frac{1}{\log_a b}} = a^{\log_a c \cdot \log_b a} = (a^{\log_a c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}, \text{ что и требовалось}$$

(на последнем шаге мы воспользовались в скобках основным логарифмическим тождеством).

Применяя полученную формулу, скажем, к выражению $5^{\log_3 7}$, мы получим: $5^{\log_3 7} = 7^{\log_3 5}$, и никакого упрощения не произошло.

Если же применить полученную формулу к рассмотренному выше выражению

$$16^{\log_8 5}, \text{ то получим: } 16^{\log_8 5} = 5^{\log_8 16} = 5^{\log_2 3 \cdot 2^4} = 5^{\frac{4}{3} \log_2 2} = 5^{\frac{4}{3}} = 5\sqrt[3]{5}.$$

Преобразование получилось более быстрым, чем раньше.

Рассмотрим ещё один пример использования этой формулы.

Пример 6. Вычислите $\frac{5^{\log_6 7} \cdot 5^{\log_7 6}}{6^{\log_7 5} \cdot 7^{\log_6 5}}$

Решение. Применяя формулу $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ к каждому множителю в числителе, получим:

$$\frac{5^{\log_6 7} \cdot 5^{\log_7 6}}{6^{\log_7 5} \cdot 7^{\log_6 5}} = \frac{7^{\log_6 5} \cdot 6^{\log_7 5}}{6^{\log_7 5} \cdot 7^{\log_6 5}} = 1.$$

Ответ: 1.

Докажем ещё одну формулу. Эта формула позволяет преобразовывать произведение двух логарифмов по разным основаниям:

$$\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$$

Читают её обычно так: «В произведении двух логарифмов по разным основаниям можно поменять местами подлогарифмические выражения».

Разумеется, рассматриваемую формулу можно применять и к произведению двух логарифмов по одному основанию, но это приведёт просто к перестановке местами множителей, т.е. не даст ничего нового.

Доказательство начнём с того, что перейдём в первом логарифме к основанию b , а во втором – к основанию a . Получим:

$$\log_a x \cdot \log_b y = \frac{\log_b x}{\log_b a} \cdot \frac{\log_a y}{\log_a b} = \frac{\log_b x \cdot \log_a y}{\log_b a \cdot \log_a b} = \frac{\log_b x \cdot \log_a y}{1} = \log_a y \cdot \log_b x,$$

что и требовалось доказать (мы воспользовались тем, что в знаменателе стоит произведение взаимно обратных чисел).

Доказанная формула позволяет легко решать многие задачи, которые без её использования решаются заметно сложнее.

В заключение параграфа рассмотрим ещё несколько примеров преобразований выражений с логарифмами.

Пример 7. Найдите $\lg 45$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение.

$$\lg 45 = \lg \frac{90}{2} = \lg 90 - \lg 2 = \lg(9 \cdot 10) - a = \lg 9 + \lg 10 - a = 2 \lg 3 + 1 - a = 2b + 1 - a = 2b - a + 1.$$

Ответ: $2b - a + 1$.

Пример 8. Вычислите $\frac{\log_3 15 + \log_5 15}{\log_3 15 \cdot \log_5 15}$.

Решение. Разложим 15 на простые множители и перейдём в логарифмах к одинаковому основанию, например, к основанию 3. При этом неоднократно возникающий $\log_3 5$ обозначим какой-нибудь буквой, скажем x : $\log_3 5 = x$. Получим:

$$\log_3 15 = \log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + x;$$

$$\log_5 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 5} = \frac{\log_3 (3 \cdot 5)}{x} = \frac{\log_3 3 + \log_3 5}{x} = \frac{1 + x}{x}.$$

$$\text{Поэтому } \frac{\log_3 15 + \log_5 15}{\log_3 15 \cdot \log_5 15} = \frac{(1 + x) + \frac{1 + x}{x}}{(1 + x) \cdot \frac{1 + x}{x}}.$$

Теперь вынесем сначала в числителе $1 + x$ за скобку, произведём сокращение на $(1 + x)$, а затем умножим числитель и знаменатель на x :

$$\frac{(1+x) + \frac{1+x}{x}}{(1+x) \cdot \frac{1+x}{x}} = \frac{(1+x) \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{(1+x)^2}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{(1+x)}{x}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x}{\frac{(1+x)}{x} \cdot x} = \frac{x+1}{1+x} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 9. Вычислите: $0,25^{\lg 0,5} \cdot 0,04^{\lg 0,5} + 81^{0,5 \cdot \log_9 7} - 0,5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_2 3}}$

Решение. Преобразуем отдельно каждое показательное выражение:

$$0,25^{\lg 0,5} \cdot 0,04^{\lg 0,5} = (0,25 \cdot 0,04)^{\lg 0,5} = (0,01)^{\lg 0,5} = (10^{-2})^{\lg 0,5} = 10^{-2 \lg 0,5} = 10^{\lg 0,5^{-2}} = 10^{\lg 4} = 4$$

$$81^{0,5 \cdot \log_9 7} = (81^{0,5})^{\log_9 7} = 9^{\log_9 7} = 7;$$

$$27^{\frac{1}{\log_2 3}} = 27^{\log_3 2} = (3^3)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^3 = 2^3 = 8.$$

Теперь имеем:

$$0,25^{\lg 0,5} \cdot 0,04^{\lg 0,5} + 81^{0,5 \cdot \log_9 7} - 0,5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_2 3}} = 4 + 7 - 0,5 \cdot 8 = 4 + 7 - 4 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 10. Упростите выражение:

$$(\log_m n + \log_n m + 2)(\log_m n - \log_{mn} n) \log_n m - (1 + \log_n m) \log_m n.$$

Решение. Перейдём во всех логарифмах к одному основанию, например, m .

$$\text{Обозначим при этом } \log_m n = x. \text{ Тогда } \log_n m = \frac{1}{\log_m n} = \frac{1}{x},$$

$$\log_{mn} n = \frac{\log_m n}{\log_m mn} = \frac{x}{\log_m m + \log_m n} = \frac{x}{1+x},$$

и преобразуемое выражение примет вид:

$$\begin{aligned} & (\log_m n + \log_n m + 2)(\log_m n - \log_{mn} n) \log_n m - (1 + \log_n m) \log_m n = \\ & = \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) \cdot \left(x - \frac{x}{1+x}\right) \cdot \frac{1}{x} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot x = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} \cdot \frac{x + x^2 - x}{1+x} \cdot \frac{1}{x} - (x+1) = \frac{(x+1)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{1}{x} - (x+1) = \\ & = \frac{(x+1)^2}{x} \cdot \frac{x^2}{1+x} \cdot \frac{1}{x} - (x+1) = (x+1) - (x+1) = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Н

- 1 а) Что называется логарифмом числа a по основанию c ?
б) Что называется основанием логарифма?
в) Что называется подлогарифмическим выражением?
- 2 а) Что значит запись $\log_a x$?
б) Как называется в этой записи каждая из букв a и x ?
в) Какие значения могут принимать в этой записи буквы a и x ?
- 3 а) Что называется десятичным логарифмом? Каковы особенности его записи?
б) Что называется натуральным логарифмом? Каковы особенности его записи?
- 4 Закончите предложения и запишите соответствующие формулы.
а) Сумма двух логарифмов по одному основанию равна ...
б) Разность двух логарифмов по одному основанию равна ...
в) Частное двух логарифмов по одному основанию равно ...
Умеете ли вы доказывать эти формулы?
- 5 Сможете ли вы закончить предложения и записать соответствующие формулы?
а) Произведение двух логарифмов по одному основанию равно ...
б) Произведение двух логарифмов по разным основаниям равно ...
- 6 а) Выпишите все известные вам логарифмические формулы.
б) Докажите несколько из выписанных вами формул.
- 7 а) Что такое основное логарифмическое тождество?
б) Знаете ли вы какие-нибудь обобщения основного логарифмического тождества?
- 8 а) Что называется формулой перехода к новому основанию в логарифме?
б) К любому ли новому основанию можно перейти в логарифме?
в) Что получится, если в логарифме перейти новому основанию, равному подлогарифмическому выражению?
- 9 а) Что произойдёт с логарифмом, если его основание и подлогарифмическое выражение возвести одновременно в квадрат?
б) Что произойдёт с логарифмом, если из его основания и из подлогарифмического выражения извлечь одновременно кубический корень?
в) Запишите формулу, на основе которой вы отвечали на два предыдущих вопроса.
- 10 Вычислите.
а) $\log_{12} 144$; в) $\log_7 49$; д) $\log_5 125$;
б) $\log_3 81$; г) $\log_2 \sqrt{2}$; е) $\log_{10} 10000$.

11 Вычислите.

- а) $\log_{0,2} 25$; в) $\log_{0,1} 100$; д) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$;
б) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; г) $\log_{1,5} \frac{9}{4}$; е) $\log_{0,25} 0,015625$.

12 Вычислите.

- а) $\log_2 16 - \log_{\frac{1}{3}} 3$; в) $\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{3}} 3$; д) $4\log_4 \sqrt[4]{4} + \log_{10} \sqrt{10}$;
б) $\log_3 81 - 2\log_{\frac{1}{10}} 10$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_3 \frac{1}{3}$; е) $\log_{13} 169 + \log_2 1024$.

13 Упростите.

- а) $\log_x \sqrt[5]{x}$; в) $\log_{\frac{x^3}{27}} x$; д) $\log_{\sqrt[3]{x}} x$;
б) $\log_{2x} 4x^2$; г) $\log_{x+1} (x^2 + 2x + 1)$; е) $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[8]{x}$.

14 Найдите значение выражения.

- а) $27^{\log_3 2}$; в) $\sqrt{5}^{\log_5 \frac{1}{25}}$; д) $256^{\log_2 4}$;
б) $8^{\log_2 5}$; г) $10^{\log_{0,1} 0,01}$; е) $121^{\log_{11} 2}$.

15 Найдите значение выражения.

- а) $25^{\log_5 \sqrt{5}}$; в) $\sqrt{17}^{\log_{17} 2}$; д) $0,75^{\log_{\frac{16}{9}} 9}$;
б) $8^{\log_2 2\sqrt{2}}$; г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 0,25}$; е) $\sqrt[5]{3}^{\log_9 6}$.

16 Вычислите.

- а) $\log_{12} 216 - \log_{12} 1,5$; в) $\log_{10} \frac{2500}{7} - \log_{10} \frac{25}{7}$;
б) $\log_3 63 - \log_3 \frac{7}{9}$; г) $\log_{\frac{1}{2}} 80\sqrt{2} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{\sqrt{2}}$.

17 Вычислите.

- а) $\log_6 4 + 2\log_6 3$; в) $3\log_{30} 4 + 6\log_{30} 15$;
б) $10\log_{12} 2 + 5\log_{12} 3$; г) $6\log_{14} \sqrt{2} + 3\log_{14} 7$.

18 Найдите значение выражения.

а) $\frac{\log_3 15}{\log_9 15}$; в) $\frac{\log_{\sqrt{3}} 10}{\log_{81} 10}$;
б) $\frac{\log_{25} 7}{\log_5 7}$; г) $\frac{\log_{100} 4}{\log_{1000} 2}$.

19 Упростите.

а) $\frac{\lg x}{\lg y} - \log_y x^3 + \frac{2}{\log_x y}$; в) $\log_{\sqrt{x}} y^2 - 2 \log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{y}$;
б) $\log_{x^3} y + \log_{x^2} y - \frac{1}{6} \log_x y^5$; г) $\log_x \frac{y}{2} - \log_x 2 + \frac{1}{\log_{y^2} x}$.

20 Найдите значение выражения.

а) $\frac{7^{\log_3 45}}{7^{\log_3 5}}$; в) $\frac{11^{\log_7 196}}{11^{\log_7 4}}$;
б) $\frac{2^{\log_5 75}}{2^{\log_5 3}}$; г) $\frac{10^{\log_{0,2} 0,08}}{10^{\log_{0,2} 10}}$.

21 Вычислите:

а) $\log_4 \sin \frac{\pi}{8} + \log_4 \cos \frac{\pi}{8}$; в) $\log_{\frac{1}{3}} \left(\sin \frac{\pi}{6} - 1 \right) - \log_{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} - 1 \right) + \log_3 (2 + \sqrt{3})$;
б) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} \sin \frac{\pi}{12} + \log_{\frac{1}{4}} \cos \frac{\pi}{12}$; г) $\log_{\sqrt{12}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{29} + \log_{\sqrt{12}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{29}$.

П

22 Вычислите.

а) $\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt{3}}$; в) $\log_6 \log_6 \frac{\sqrt[2]{\sqrt[3]{\sqrt{6}}}}{\sqrt[180]{6}}$;
б) $\log_4 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; г) $\log_5 \log_5 \sqrt[125]{\sqrt[25]{\sqrt{5}}}$.

23 Упростите выражение.

а) $\log_{1,5} 5 \cdot \log_8 \frac{4}{9} \cdot \log_{0,04} 4$; в) $\log_{\frac{2}{3}} 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 625 \cdot \log_5 \frac{27}{8}$;
б) $\log_{\frac{5}{4}} 5 \cdot \log_7 \frac{16}{25} \cdot \log_5 \frac{1}{49}$; г) $\log_{\frac{144}{25}} \frac{1}{25} \cdot \log_5 \sqrt{11} \cdot \log_{11} \sqrt{\frac{5}{12}}$.

24 Вычислите.

- а) $\ln \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \ln \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \ln \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \ln \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \ln \operatorname{tg} 89^\circ$;
 б) $\ln \operatorname{tg} 1^\circ + \ln \operatorname{tg} 2^\circ + \ln \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \ln \operatorname{tg} 88^\circ + \ln \operatorname{tg} 89^\circ$.

25 а) Найдите $\log_{xy} x^5 y$, если $\log_{xy^2} xy^3 = 2$;

б) Найдите $\log_{xy} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y}}$, если $\log_{xy} x = a$.

26 Найдите значение выражения.

- а) $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$; в) $0,1^{\log_{10} 75} + 4 \cdot \sqrt[3]{12^{\log_{12} 144}} - 45^{\frac{\log_1 \frac{1}{5}}{\sqrt[3]{144}}}$;
 б) $5^{\log_{25} \frac{2}{3}} - 2\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{\log_1 \frac{3}{5} + \log_1 5}{9}} + 47^{\frac{\log_1 4}{49}}$; г) $4 \cdot 9^{\log_3 11} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{5} \right)^{1-\log_{25} 3} - \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\log_1 \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$.

27 Упростите.

- а) $\frac{\log_3 15 + \log_5 15}{\log_3 15 \cdot \log_5 15}$; в) $\frac{\log_2 72 \log_3 72}{\frac{1}{3} \log_2 72 + \frac{1}{2} \log_3 72}$;
 б) $\frac{3 \log_7 56 + \log_2 56}{3 \log_7 56 \log_2 56}$; г) $\frac{\frac{1}{2} \log_4 2000 + \frac{1}{3} \log_5 2000}{\log_{\sqrt{2}} 2000 \log_{\sqrt[3]{5}} 2000}$.

28 Упростите выражение

- а) $\frac{1 - \log_a^3 b}{(1 + \log_a b + \log_b a) \log_a \frac{a}{b}}$; в) $\frac{1}{\ln b} - \frac{-2 \ln a - \ln^2 a + \ln b + 2 \log_a b}{\frac{\log_2 b \cdot \ln b}{\log_4 a} + \ln^2 b}$;
 б) $\frac{\log_a b - \log_b a}{\log_b \frac{a}{b} - \log_b \frac{b}{a}}$; г) $\frac{\log_a b - \log_a 2}{\log_b ab - \log_a ab} + \frac{\log_a b + \log_a 2}{\log_b ab + \log_a ab} + 2(\log_{ab} b)^2 \log_{\frac{a}{b}} \frac{2}{a}$.

29 Докажите тождество.

- а) $\frac{\log_a x \cdot \log_c x}{\log_a x + \log_c x} = \log_{ac} x$;
 б) $\frac{\log_{ab} x + \log_{ac} x + \log_{bc} x}{\ln^2 x (\log_x ab + \log_x ac + \log_x bc)} = \frac{1}{2 \ln abc} \left(\frac{1}{\ln bc} + \frac{\ln a^2 bc}{\ln ab \cdot \ln ac} \right)$;
 в) $\frac{(\log_a x + \log_{ab} x)(\log_b x + \log_x a)}{(\log_b x + \log_x b)(\log_a x + \log_x b)} = \frac{\ln^2 x}{\ln^2 b + \ln^2 x} \log_{ab} a^2 b$;

$$\text{г) } \frac{\log_{a^2b} x + \log_{ab} x + \log_{ab^2} x}{\log_{a^2b} x - \log_{ab} x - \log_{ab^2} x} + 5 = \frac{2 \ln a \cdot \ln a^5 b^7}{3 \ln^2 a + 5 \ln a \cdot \ln b + \ln^2 b}.$$

30 Найдите указанные логарифмы при заданных условиях.

а) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27 = x$;

б) $\log_{300} 120$, если $\log_2 3 = x$, $\log_3 5 = y$;

в) $\log_{140} 350$, если $\log_7 5 = x$, $\log_5 2 = y$;

г) $\log_{63} 4$, если $\log_7 2 = x$, $\log_3 2 = y$.

М

31 Упростите выражение:

$$\frac{\log_{a+b} a \cdot \log_{a-b} b + \log_{a^2-b^2} a}{\log_b (a+b) \cdot \log_a (a-b) + \log_a (a^2-b^2)} - \frac{\log_{a+b} a \cdot \log_{a-b} b + \log_{a^2-b^2} b}{\log_b (a+b) \cdot \log_a (a-b) + \log_b (a^2-b^2)} +$$

$$+ \frac{\log_{a+b} a - \log_{a^2-b^2} b}{\log_a (a+b) - \log_b (a^2-b^2)} + \frac{\log_{a-b} a}{\log_b (a+b)} \log_{a^2-b^2} \left(\frac{ab-b^2}{a} \right).$$

32 Вычислите значение выражения $\log_x (x^7 + x^2 - 1)$, где x – положительный корень уравнения $x^{16} + x^9 + x^2 = 1$.

33 Вычислите: $\log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19$.

1.7. Логарифмическая функция

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$ при основании $a > 1$. Её свойства нам хорошо знакомы из параграфа 1.4. В частности, областью определения является множество всех действительных чисел: $D(y) = (-\infty; +\infty)$, а областью значений – множество всех положительных действительных чисел: $E(y) = (0; +\infty)$. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ является возрастающей и непрерывной на своей области определения. Отсюда можно заключить, что существует обратная функция с областью определения $(0; +\infty)$ и областью значений $(-\infty; +\infty)$, тоже являющаяся возрастающей и непрерывной на своей области определения.

Зададим эту обратную функцию формулой. Для этого нужно в равенстве $y = a^x$ выразить x через y . Проанализировав внимательно равенство $y = a^x$, можно заключить, что x в этом равенстве – это такой показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число y . Но такой показатель степени называется логарифмом числа y по основанию a , т.е. $x = \log_a y$. Переписав полученное равенство в стандартном при записи функций виде, т.е. $y = \log_a x$, мы получаем следующий результат: Функцией, обратной к функции $y = a^x$, является функция $y = \log_a x$.

Мы установили это при $a > 1$, но при $0 < a < 1$ это тоже верно, т.к. и для этого случая можно провести точно такие же рассуждения, как и выше.

Функция $y = \log_a x$, где a – действительное положительное число, отличное от единицы, называется *логарифмической функцией*.

Свойства логарифмической функции могут быть выведены из свойств показательной функции, т.к. эти функции являются взаимно обратными. Так же, как и для показательной функции, эти свойства имеют свои особенности при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$.

- 1) Область определения $D(y) = (0; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функция непрерывна на всей области определения – интервале $(0; +\infty)$.
- 4) Функция возрастающая на всей области определения.
- 5) Единственным нулём функции является число $x = 1$, т.е. график функции проходит через точку $(1; 0)$.
- 6) Функция принимает положительные значения на интервале $(1; +\infty)$, и функция принимает отрицательные значения на интервале $(0; 1)$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.
- 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty$, т.е. ось ординат является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$.

График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ при $a > 1$ относительно прямой $y = x$ (рис. 1.14 а).

На рис. 1.14 б изображены графики логарифмической функции при $a = 2$ и $a = 3$.

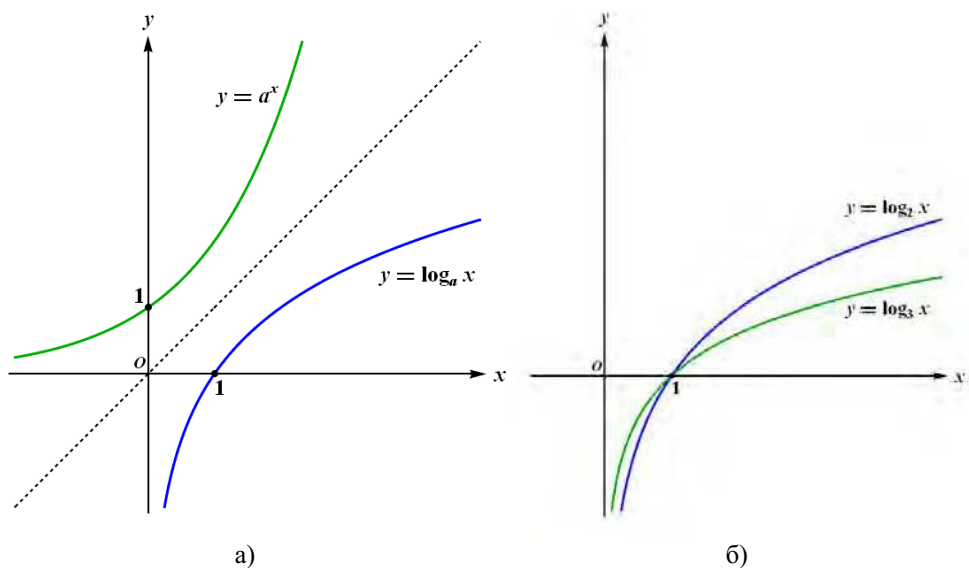


Рис. 1.14

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

- 1) Область определения $D(y) = (0; +\infty)$.
- 2) Область значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функция непрерывна на всей области определения – интервале $(0; +\infty)$.
- 4) Функция убывающая на всей области определения.
- 5) Единственным нулём функции является число $x = 1$, т.е. график функции проходит через точку $(1; 0)$.
- 6) Функция принимает положительные значения на интервале $(0; 1)$, и функция принимает отрицательные значения на интервале $(1; +\infty)$.
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$.
- 8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty$, т.е. ось ординат является вертикальной асимптотой графика функции $y = \log_a x$.

График функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ относительно прямой $y = x$ (рис. 1.15 а).

На рис. 1.15 б изображены графики логарифмической функции при $a = \frac{1}{2}$ и $a = \frac{1}{3}$.

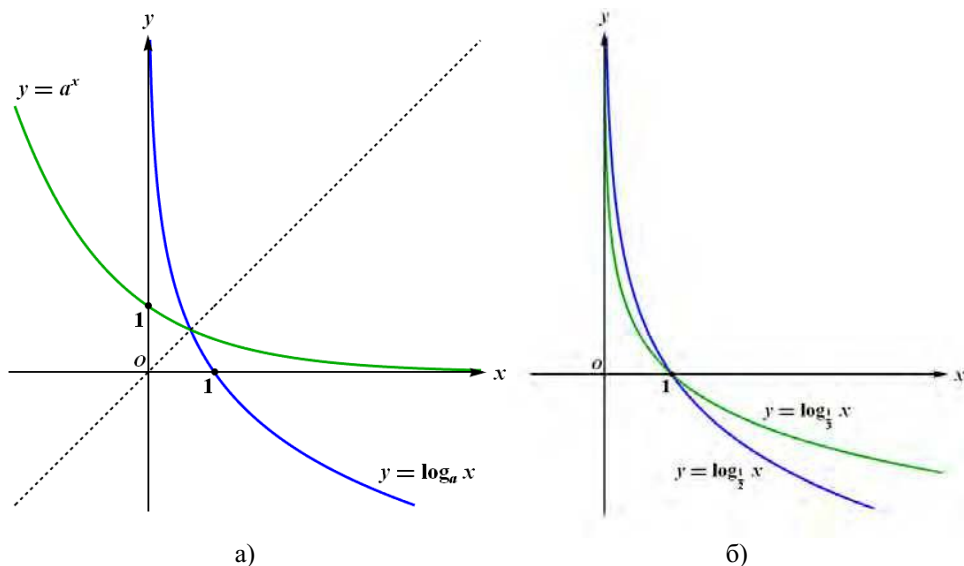


Рис. 1.15

Н

- 1 а) Что называется логарифмической функцией?
- б) Какова область определения логарифмической функции?
- в) Какова область значений логарифмической функции?

2 Является ли логарифмическая функция:

- а) чётной?
- в) периодической?
- б) нечётной?
- г) монотонной?

В каждом случае обоснуйте свой ответ.

- 3 а) Одиннадцатиклассник Вася считает, что логарифмической функцией называется функция, заданная формулой, содержащей логарифмы. Прав ли Вася?
- б) Одиннадцатиклассник Ваня считает, что логарифмической функцией называется функция, заданная формулой, содержащей единственный логарифм. Прав ли Ваня?

4 а) Перечислите свойства логарифмической функции при основании, большем единицы.

б) Перечислите свойства логарифмической функции при положительном основании, меньшем единицы.

в) Какие свойства в пунктах а) и б) одинаковы, а какие различны? В чём заключаются различия?

г) Чем обусловлены различия в поведении логарифмических функций?

5 а) Как выглядит график логарифмической функции?

б) Какие особенности имеет график логарифмической функции в зависимости от основания логарифма?

6 Как связаны между собой графики логарифмических функций $y = \log_a x$ и $y = \log_{\frac{1}{a}} x$? На чём основана эта связь?

7 а) Является ли логарифмическая функция взаимно однозначной?

б) Является ли логарифмическая функция непрерывной в любой точке области определения?

в) Что можно сказать о пределе логарифмической функции при $x \rightarrow +\infty$?

8 Имеет ли логарифмическая функция обратную функцию? Если нет, объясните, почему. Если да, скажите, что представляет собой эта обратная функция.

9 Начертите в одной системе координат графики и сравните их поведение.

а) $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; в) $y = \log_5 x$ и $y = \log_{\frac{1}{5}} x$;

б) $y = \log_{0,5} x$ и $y = \log_2 x$; г) $y = \log_{0,25} x$ и $y = \log_4 x$.

10 Начертите график логарифмической функции и проиллюстрируйте с помощью графика её свойства.

а) $y = \log_3 x$; в) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$;

б) $y = \log_{1,5} x$; г) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

11 Используя свойства логарифмической функции, сравните числа:

а) $\log_3 5$ и $\log_3 6$; в) $\log_{10} \frac{7}{8}$ и $\log_{10} \frac{3}{4}$;

б) $\log_7 12$ и $\log_7 \sqrt{145}$; г) $\log_5 2$ и $\log_5 2,2$.

12 Установите, какое число больше.

а) $\log_{0,9} 8$ или $\log_{0,9} 9$;

в) $\log_{\frac{9}{13}} 10$ и $\log_{\frac{9}{13}} 9$;

б) $\log_{0,1} \frac{2}{3}$ и $\log_{0,1} \frac{1}{3}$;

г) $\log_{\frac{4}{5}} 2$ и $\log_{\frac{4}{5}} 1,8$.

13 Установите, при каких x функция принимает положительные значения и при каких x – отрицательные.

а) $y = \log_3 x$;

в) $y = \log_{1,001} x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

г) $y = \log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x$.

14 Постройте график функции.

а) $y = \log_3 x$;

в) $y = 2 \log_2 x$;

б) $y = \log_3 (x+2)$;

г) $y = \frac{1}{2} \log_4 (x-1)$.

15 Постройте график функции.

а) $y = \log_{0,2} x$;

в) $y = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{4}} x$;

б) $y = 2 \log_{0,4} x$;

г) $y = \log_{0,1} (x-2)$.

П

16 Постройте график функции.

а) $y = \log_2 x$;

в) $y = \log_2 3x$;

д) $y = \log_2 (-x)$;

б) $y = \log_2 (x+1)$;

г) $y = \log_2 (1-x)$;

е) $y = \log_2 (1-3x)$.

17 Постройте график функции.

а) $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$;

в) $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$;

д) $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x)$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+1)$;

г) $y = \log_{\frac{1}{3}} (3-x)$;

е) $y = 2 \log_{\frac{1}{3}} (3-2x)$.

18 Постройте график функции.

а) $y = \log_2 |x|$;

в) $y = \log_2 |x+3|$;

д) $y = -\log_{\frac{1}{3}} |3-x|$;

б) $y = |\log_2 x|$;

г) $y = \log_{\frac{1}{2}} |2x+1|$;

е) $y = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| \right|$.

19 Начертите в одной системе координат графики и сравните их поведение.

а) $y = \log_3 x$ и $y = \log_4 x$;

в) $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

г) $y = \log_{2,5} x$ и $y = \log_{1,5} x$.

М

20 Постройте график функции.

а) $y = \log_x 3$;

б) $y = \log_x x$;

в) $y = \log_x 3x$.

1.8. Производные показательной и логарифмической функций

Как вы помните из курса алгебры и начал математического анализа 10 класса, нахождение производных тригонометрических функций основывалось на первом замечательном пределе. Оказывается, нахождение производных показательной и логарифмической функций основывается на втором замечательном пределе.

Этот предел был рассмотрен в параграфе 1.5 как предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Можно доказать, что аналогичный предел функции при $x \rightarrow \infty$ тоже равен e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Иногда этот предел удобнее записать в другом виде. Сделаем в нём замену переменной $x = \frac{1}{t}$. Тогда $t = \frac{1}{x}$ и т.к. $x \rightarrow \infty$, то $t \rightarrow 0$.

В результате получим: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$.

С помощью последнего предела мы найдём ещё два важных предела, которые понадобятся нам для нахождения производных показательной и логарифмической функций.

Докажем, сначала, что $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

Для доказательства нам понадобится изученное в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса правило: «Знак предела можно переставлять со

знаком непрерывной функции», т.е. если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right).$$

Напомним, что натуральный логарифм является непрерывной функцией на всей своей области определения.

Итак, поскольку $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, то $\ln\left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \ln e = 1$ и имеем:

$$1 = \ln e = \ln\left(\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t},$$

на чём доказательство и закончено.

Теперь докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Сделаем в этом пределе замену переменной $e^x - 1 = t$. Тогда при $x \rightarrow 0$ также и $t \rightarrow 0$. Кроме того, $e^x = 1+t$ и $x = \ln(1+t)$. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1, \text{ поскольку ранее было доказано, что } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

Теперь у нас имеется необходимая база для нахождения производных показательной и логарифмической функций.

1. Найдём производную функции $f(x) = e^x$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1).$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и преобразуем его: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$.

3) Найдём предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

Мы вынесли за знак предела постоянный множитель e^{x_0} , и у нас возник один из найденных выше пределов.

Итак, доказано, что если $f(x) = e^x$, то $f'(x_0) = e^{x_0}$, а значит, $f'(x) = e^x$. Этот результат можно записать так: $(e^x)' = e^x$.

Мы выяснили, что функция $f(x) = e^x$ равна своей производной. Можно сказать также, что функция $f(x) = e^x$ не меняется при дифференцировании.

II. Производную функции $f(x) = a^x$ при любом положительном a , отличном от единицы, проще всего найти, сведя её к производной функции $y = e^x$, преобразовав по основному логарифмическому тождеству a к виду $a = e^{\ln a}$. При этом придётся применить формулу для производной сложной функции. Получим:

$$(a^x)' = \left((e^{\ln a})^x \right)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Итак, получена формула: $(a^x)' = a^x \ln a$.

Полученная ранее для производной функции $f(x) = e^x$ формула $(e^x)' = e^x$ является её частным случаем.

III. Найдём производную функции $f(x) = \ln x$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta y = \ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 = \ln \frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right).$$

Мы воспользовались формулой преобразования разности логарифмов в логарифм частного.

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)}{\Delta x}$. Упростить его не удаётся.

3) Найдём предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)}{\Delta x}.$$

Сделаем в этом пределе замену переменной $\frac{\Delta x}{x_0} = t$. Тогда при $\Delta x \rightarrow 0$ также и $t \rightarrow 0$. Кроме того, $\Delta x = x_0 t$ и имеем:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{x_0 t} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}.$$

Мы доказали, что если $f(x) = \ln x$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$, а значит, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Этот

результат можно записать так: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

IV. Производную функции $f(x) = \log_a x$ при любом положительном a , отличном от единицы, проще всего найти, перейдя к основанию e и воспользовавшись тем, что производную натурального логарифма мы знаем. Получим:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак, получена формула: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

Полученная ранее формула для производной натурального логарифма $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ является её частным случаем.

Рассмотрим несколько примеров, в решениях которых используются производные показательной и логарифмической функций.

Пример 1. Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{e^{3x-6}}{x^3 + 2x^2} - 1$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Применим правило дифференцирования частного, учитывая при этом, что e^{3x-6} – сложная функция. Получим:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^{3x-6}}{x^3 + 2x^2} - 1 \right)' = \frac{(e^{3x-6})' \cdot (x^3 + 2x^2) - (e^{3x-6}) \cdot (x^3 + 2x^2)'}{(x^3 + 2x^2)^2} = \\ &= \frac{(e^{3x-6})' \cdot (x^3 + 2x^2) - (e^{3x-6}) \cdot (x^3 + 2x^2)'}{(x^2(x+2))^2} = \frac{(e^{3x-6})' \cdot 3 \cdot (x^3 + 2x^2) - (e^{3x-6}) \cdot (3x^2 + 4x)}{x^4(x+2)^2} = \\ &= \frac{(3x^3 + 3x^2 - 4x) \cdot e^{3x-6}}{x^4(x+2)^2} = \frac{(3x^2 + 3x - 4) \cdot e^{3x-6}}{x^3(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $x=2$, получим: $f'(2) = \frac{(3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 4) \cdot e^0}{2^3 \cdot 4^2} = \frac{14}{128} = \frac{7}{64}.$

Ответ: $\frac{7}{64}.$

Пример 2. Исследуйте функцию $y = 11 + 4 \ln x - x^4$ на монотонность.

Решение. Найдём область определения: $D(y) = (0; +\infty)$. Вычислим производную

$$y' = (11 + 4 \ln x - x^4)' = \frac{4}{x} - 4x^3.$$

Найдем критические точки, решив уравнение $\frac{4}{x} - 4x^3 = 0$. Единственная критическая точка 1. Она делит $D(y)$ на два интервала: $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$. На первом из них производная положительна, а на втором – отрицательна, поэтому функция возрастает на интервале $(0; 1]$ и убывает на интервале $[1; +\infty)$.

Пример 3. Найдите точки экстремума функции $f(x) = x^2 e^{x-1}$.

Решение. Область определения: $D(f) = R$.

Вычислим производную: $f'(x) = (x^2 e^{x-1})' = 2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1} = x e^{x-1} (2 + x)$.

Приравнявая производную к нулю, получим две критические точки: -2 и 0 .

Изображаем область определения – всю числовую ось, и наносим на неё критические точки 0 и -2 (закрашенными) (рис. 1.16). Расставляем знаки производной на образовавшихся промежутках $(-\infty; -2)$; $(-2; 0)$ и $(0; +\infty)$: на первом и третьем из них производная положительна, а на втором – отрицательна.

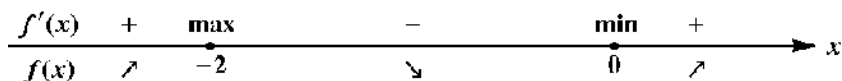


Рис. 1.16

Поскольку знак производной при переходе через критическую точку -2 меняется с «+» на «-», то это точка максимума. Поскольку знак производной при переходе через критическую точку 0 меняется с «-» на «+», то это точка минимума.

Ответ: $x_{\max} = -2$; $x_{\min} = 0$.

Пример 4. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_3 \log_2 (x-1)$ на отрезке $[3; 9]$.

Решение. Эту задачу нецелесообразно решать с применением производной. Гораздо удобней воспользоваться методом «шаг за шагом», учитывая, что функция $y = \log_a t$ является возрастающей при $a > 1$. Получим последовательно:

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 9 &\Leftrightarrow 2 \leq x-1 \leq 8 \Leftrightarrow \log_2 2 \leq \log_2 (x-1) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow 1 \leq \log_2 (x-1) \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3 1 \leq \log_3 (\log_2 (x-1)) \leq \log_3 3 \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 (\log_2 (x-1)) \leq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, множество значений функции $y = \log_3 \log_2 (x-1)$ на отрезке $[3; 9]$ представляет собой отрезок $[0; 1]$, а наибольшее значение функции $y = \log_3 \log_2 (x-1)$ на отрезке $[3; 9]$ равно 1.

Ответ: 1.

Н

1 а) По какой формуле находится производная показательной функции?
б) Верно ли, что при выводе формулы производной показательной функции используется второй замечательный предел? Если да, то укажите, где именно.

2 а) По какой формуле находится производная логарифмической функции?
б) Верно ли, что при выводе формулы производной логарифмической функции используется второй замечательный предел? Если да, то укажите, где именно.

3 Найдите производную функции.

а) $y = x^2 \ln x$; в) $y = \frac{\ln x}{x}$; д) $y = 3^x \ln x$;
б) $y = \frac{2^x}{x}$; г) $y = xe^x$; е) $y = (\ln x + 1)^2$.

4 Найдите производную функции.

а) $y = \ln(x+1)$; в) $y = (x+2^x)x$; д) $y = \frac{\ln x}{x+1}$;
б) $y = 2^{3^x}$; г) $y = \frac{2^x + 3^x}{4^x}$; е) $y = \ln(5^x + 1)$.

5 Найдите производную функции.

а) $y = (x^2 + x)e^{x-1}$; в) $y = (x+2)^3 e^{1-2x}$;
б) $y = (2x^3 - x^2)e^{2x-3}$; г) $y = \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 e^{2+\frac{x}{2}}$.

6 Найдите производную функции.

а) $y = \frac{e^{2x+1}}{x-2}$; в) $y = xe^{x+2} + (x+2)e^x$;
б) $y = \frac{xe^{4+\frac{5}{2}x}}{x^2 + x - 1}$; г) $y = \frac{x-2}{e^x + x}$.

7 Найдите вторую производную функции.

- а) $y = x \ln x$; в) $y = (2x+1)e^x$; д) $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$;
б) $y = e^{-2x}$; г) $y = (x^2 + 1) \ln x$; е) $y = \frac{e^x}{x}$.

8 Исследуйте функцию на экстремумы.

- а) $y = e^x(3x-2)$; в) $y = 2x-1 + \ln 2x$;
б) $y = 10x - \ln(x+11)$; г) $y = x - 2^x$.

9 Исследуйте функцию на экстремумы.

- а) $y = (x^2 - 16x + 16)e^{x-3}$; в) $y = (2-x^2)e^{2x+2}$;
б) $y = (2x^2 + 4x - 5)e^{1-x}$; г) $y = (2-5x-x^2)e^{5-8x}$.

10 Найдите интервалы монотонности функции.

- а) $y = (x^2 - 11x + 11)e^{6-x}$; в) $y = (x^3 + x^2)e^{5-x}$;
б) $y = 12x - \ln 4x + 2$; г) $y = \frac{\ln x - 2}{x}$.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 8x - 8 \ln(x+3) + 5$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(3x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right]$.

13 Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^2 - 12x + 6 \ln x + 2$ на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

14 Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - \ln(x+2)^7$ на отрезке $\left[-\frac{7}{6}; 0\right]$.

15 Найдите наименьшее значение функции $y = (x-20)e^{x-19}$ на отрезке $[17; 20]$.

16 Найдите наибольшее значение функции $y = x - e^x$ на отрезке $[-2; 2]$.

17 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln x^3 - 3x^3$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

18 Исследуйте функцию на экстремумы и монотонность.

а) $y = 2^x \cdot 3^x$;

в) $y = e^x (x-1)$;

б) $y = \ln(1+x) + \ln(1-x)$;

г) $y = \frac{x}{\ln x}$.

П

19 Найдите интервалы монотонности функции.

а) $y = \frac{\ln x}{x}$;

в) $y = x \ln \frac{1}{-x}$;

б) $y = x^2 e^x$;

г) $y = 2^x + \ln x$.

20 Найдите точки экстремумов и экстремумы функции.

а) $y = x \ln x$;

в) $y = 2x - x \ln x$;

б) $y = x^2 - \ln(2x+1)$;

г) $y = -x^2 - \ln \frac{1}{x^2}$.

21 Исследуйте функцию на экстремумы и монотонность.

а) $y = (x+5)^2 e^{8-x}$;

в) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 e^{x+1}$;

б) $y = (2x-1)e^{2x}$;

г) $y = (3x+5)^4 e^{\frac{1}{3}+4x}$.

22 Найдите наименьшее значение функции $y = \ln(x^2 - 2x + 5)$ на отрезке $[0; e]$.

23 Найдите наименьшее значение функции $y = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

24 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x^3 + 2x^2)$ на отрезке $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$.

25 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln \frac{1}{x^2 + x + 1}$ на отрезке $[-5; 5]$.

26 Выведите формулу для производной функции $f(x) = e^x$, основываясь на том, что $f^{-1}(x) = \ln x$ и $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

27 Выведите формулу для производной функции $g(x) = \ln x$, основываясь на том, что $g^{-1}(x) = e^x$ и $(e^x)' = e^x$.

т.е. вычислив предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

т. е. вычислив предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

M

а) $e^x \geq 1+x$; б) $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$.

б) С помощью результата предыдущего пункта докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим n положительных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

32 Докажите, что для всех $x \geq 1$ справедливо неравенство: $2x \ln x \leq x^2 - 1$.

ГЛАВА II

Первообразная и интеграл

2.1. Первообразная

Нам неоднократно приходилось решать задачу нахождения производной данной функции. Естественно поставить обратную задачу: Найти функцию, если известна её производная. Скажем, производной какой функции является функция $\cos x$?

Мы приходим к следующему определению:

Первообразной данной функции называется такая функция, производная которой равна данной функции.

Более подробно это определение выглядит так:

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором открытом интервале $(a; b)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если при всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Интервал $(a; b)$ при этом может быть и бесконечным, т.е. иметь вид $(-\infty; +\infty)$, и полубесконечным, т.е. иметь вид $(-\infty; b)$ или $(a; +\infty)$, где a и b – некоторые действительные числа.

Заметим, что можно говорить как «первообразная данной функции», так и «первообразная для данной функции». Заметим также, что в слове «первообразная» считаются допустимыми два ударения: первообразная и первообра́зная.

Рассмотрим примеры:

1) Функция $\sin x$ является первообразной для функция $\cos x$ на интервале $(-\infty; +\infty)$, т.к. $(\sin x)' = \cos x$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Функция $\sqrt{x}$ является первообразной для функция $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на интервале $(0; +\infty)$, т.к. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ при всех $x \in (0; +\infty)$.

3) Нельзя утверждать, что функция $\sqrt[3]{x}$ является первообразной функции $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на интервале $(-\infty; +\infty)$, т.к. равенство $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ выполнено при всех $x \in (-\infty; +\infty)$, кроме $x = 0$. Но можно утверждать, что функция $\sqrt[3]{x}$ является первообразной функции $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ на интервале $(-\infty; 0)$ и на интервале $(0; +\infty)$.

Таким образом, проверить, является ли первая функция первообразной второй функции очень просто – нужно вычислить производную первой функции и посмотреть, равна ли она второй функции.

Сразу же бросается в глаза следующее обстоятельство: Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, то для любого действительного числа C функция $F(x) + C$ тоже является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то и $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

Возникает вопрос: А есть ли у функции $f(x)$ какие-нибудь другие первообразные – такие, которые не могут быть записаны в виде $F(x) + C$?

Ответ на этот вопрос даёт теорема, называемая основным свойством первообразной или теоремой о разности двух первообразных:

Разность любых двух первообразных одной и той же функции на интервале есть постоянная.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые две первообразные функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$. Тогда при всех $x \in (a; b)$ имеем: $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$. Обозначим через $g(x)$ разность этих первообразных: $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и докажем, что функция $g(x)$ постоянная.

Имеем: $g'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ при всех $x \in (a; b)$. Функция $g(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ как разность двух дифференцируемых функций, а значит, непрерывна на нём. Возьмём любые две точки u и v , принадлежащие интервалу $(a; b)$, такие что $u < v$, и рассмотрим отрезок $[u; v]$. Функция непрерывна на этом отрезке и дифференцируема внутри

него, значит, по теореме Лагранжа существует такая точка $t \in (u; v)$, что $g(v) - g(u) = g'(t) \cdot (v - u)$. Но $g'(t) = 0$, т.к. $g'(x) = 0$ при всех $x \in (a; b)$. Отсюда следует, что $g(v) - g(u) = 0$, т.е. $g(v) = g(u)$ при любых u и v , принадлежащие интервалу $(a; b)$. А это и значит, что функция $g(x)$ постоянная на интервале $(a; b)$.

Таким образом, множество всех первообразных данной функции на интервале имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ – любая из таких первообразных, а C – произвольное действительное число (постоянная). Запись $F(x) + C$ часто называют *общим видом первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$. Геометрически это значит, что графики любых двух первообразных функции на интервале получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy .

Из свойств производной просто следуют некоторые свойства первообразной.

Если на интервале $(a; b)$ функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, а функция $G(x)$ является первообразной функции $g(x)$, то функция $F(x) + G(x)$ является первообразной функции $f(x) + g(x)$, а функция $F(x) - G(x)$ является первообразной функции $f(x) - g(x)$.

Действительно, из условия следует, что $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$, поэтому:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x);$$

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x).$$

Кратко доказанная теорема формулируется так:

Первообразная суммы равна сумме первообразных.
Первообразная разности равна разности первообразных.

Второе просто доказываемое свойство первообразной следующее:

Если на интервале $(a; b)$ функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, а k – произвольное действительное число, отличное от нуля, то функция $k \cdot F(x)$ является первообразной функции $k \cdot f(x)$.

Действительно, из условия следует, что $F'(x) = f(x)$, поэтому:

$$(k \cdot F(x))' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x).$$

Кратко доказанная теорема формулируется так:

Если функцию умножить на ненулевую постоянную, то и её первообразная тоже умножится на эту постоянную.

Сформулированные правила позволяют составить таблицу первообразных основных известных нам функций, прочитывая «в обратном направлении» таблицу производных.

Скажем, мы знаем, что $(\cos x)' = -\sin x$. Отсюда следует, что первообразной функции $-\sin x$ является функция $\cos x$. Умножая и функцию, и её первообразную на -1 , получаем, что первообразной функции $\sin x$ является функция $-\cos x$. Таким образом, общий вид первообразной функции $\sin x$ имеет вид: $-\cos x + C$, где C – произвольная постоянная.

Или ещё пример. Мы знаем, что $(x^m)' = mx^{m-1}$. Сделаем в этом равенстве замену $m-1 = n$, откуда $m = n+1$, и перепишем его в виде: $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$. Отсюда следует, что первообразной функции $(n+1)x^n$ является функция x^{n+1} . Если $n+1 \neq 0$, т.е. $n \neq -1$, умножим и функцию, и её первообразную на $\frac{1}{n+1}$; получим, что первообразной функции x^n является функция $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Таким образом, при $n \neq -1$ общий вид первообразной функции x^n имеет вид: $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где C – произвольная постоянная.

Найдём первообразную функции x^n при $n = -1$, т.е. первообразную функции $\frac{1}{x}$. Мы знаем, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, но это равенство справедливо лишь при $x > 0$. Это позволяет нам утверждать, что на интервале $(0; +\infty)$ первообразной функции $\frac{1}{x}$ является функция $\ln x$. А как же быть при $x < 0$? Убедимся непосредственной проверкой, что на интервале $(-\infty; 0)$ первообразной функции $\frac{1}{x}$ является функция $\ln(-x)$. Действительно, по формуле для производной сложной функции имеем:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Объединяя эти два результата, можно сказать, что на любом интервале, не содержащем точку 0, общий вид первообразной функции $\frac{1}{x}$ имеет вид: $\ln|x| + C$, где C – произвольная постоянная.

Для практического нахождения первообразных обычно составляют таблицу, в которую включают первообразные наиболее распространённых функций.

Функция	Общий вид первообразной (C – произвольная постоянная)
0	C
k , где k – постоянная	$kx + C$
x^n , где $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
a^x , где $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$

Для удобства пользования мы включили в таблицу несколько частных случаев общих формул.

Перед тем, как перейти к разбору примеров нахождения первообразных, докажем ещё одну теорему.

Если на интервале $(a; b)$ функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, а k – произвольное действительное число, отличное от нуля, то первообразной функции $f(kx+b)$ является функция $\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$.

Эта теорема иногда называется теоремой о линейной замене аргумента при нахождении первообразной. Скажем, мы знаем, что первообразной функции $\sin x$ является функция $-\cos x$. Если мы теперь заменим x на линейную функцию аргумента x , скажем, на $3x+5$, то по обсуждаемой теореме можно утверждать, что первообразной функции $\sin(3x+5)$ является функция $-\frac{1}{3}\cos(3x+5)$.

Доказательство совсем простое. Действительно, из условия следует, что $F'(x) = f(x)$, поэтому по теореме о производной сложной функции:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(kx+b) \cdot (kx+b)' = \frac{1}{k} \cdot f(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразной функции $f(x) = (2x-7)^3 + 5^{2-x}$.

Решение. Найдём первообразные для каждого слагаемого в отдельности.

Т.к. первообразная функции x^3 – это функция $\frac{x^4}{4}$, то по теореме о линейной замене аргумента первообразной функции $(2x-7)^3$ является функция $\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-7)^3}{4}$, т.е. функция $\frac{(2x-7)^3}{8}$.

Т.к. первообразная функции 5^x – это функция $\frac{5^x}{\ln 5}$, то по теореме о линейной замене аргумента первообразной функции 5^{2-x} является функция $\frac{1}{-1} \cdot \frac{5^{2-x}}{\ln 5}$, т.е. функция $-\frac{5^{2-x}}{\ln 5}$.

Наконец, по теореме о первообразной суммы заключаем, что общий вид первообразной функции $f(x) = (2x-7)^3 + 5^{2-x}$ следующий: $F(x) = \frac{(2x-7)^3}{8} - \frac{5^{2-x}}{\ln 5} + C$.

Ответ: $F(x) = \frac{(2x-7)^3}{8} - \frac{5^{2-x}}{\ln 5} + C$

Пример 2. Найдите ту первообразную функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, график которой проходит через точку $M(4; 5)$.

Решение. Общий вид первообразной $F(x) = 2\sqrt{x} + C$. Подставляя в это равенство координаты точки M , получим: $5 = 2\sqrt{4} + C$, откуда $C = 1$.

Ответ: $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$.

При решении первых задач может сложиться впечатление, что нахождение первообразной – задача такого же уровня сложности, как и задача нахождения производной. Но это не так. Прежде всего, нет общих формул для нахождения первообразной произведения и частного двух функций. И там, где при вычислении производных просто применяется общая формула, при нахождении первообразных приходится придумывать каждый раз новые преобразования, а иногда и попросту ничего нельзя сделать.

Пример 3. Найдите общий вид первообразной функции $f(x) = \cos 5x \cos 2x$.

Решение. Общей формулы для первообразной произведения нет, но общая формула для первообразной суммы и разности есть! Поэтому при нахождении первообразных полезно преобразовывать произведения в суммы или разности. Здесь это можно сделать по известной вам тригонометрической формуле:

$$\cos 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x).$$

Поскольку первообразную функции $\cos x$ мы знаем: это $\sin x$, то первообразной функции $\cos 3x$ является $\frac{1}{3}\sin 3x$, а первообразной функции $\cos 7x$ является $\frac{1}{7}\sin 7x$, и тогда искомой первообразной является $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)$, что позволяет выписать ответ.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{14}\sin 7x + C$.

В заключение параграфа обсудим механический смысл первообразной. В курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса было установлено, что если точка движется по прямой, скажем, по оси Ox , и её координата x является функцией времени t , т.е. $x = x(t)$, то мгновенная скорость $v(t)$ точки есть производная от её координаты, а мгновенное ускорение $a(t)$ – производная от её скорости: $v(t) = x'(t)$ и $a(t) = v'(t)$.

Отсюда можно сделать следующие заключения:

При прямолинейном движении координата точки есть первообразная её скорости, а скорость есть первообразная ускорения.

В этом и заключается *механический смысл первообразной*.

При этом нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Если производная функции определяется по самой функции однозначно, то первообразная – только с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому, зная закон изменения координаты с течением времени, мы можем однозначно определить скорость точки в любой момент, а зная закон изменения скорости, координату однозначно определить нельзя, это можно сделать лишь с точностью до постоянного слагаемого. Обычно в практических задачах для однозначного определения координаты по скорости даётся дополнительное условие.

Пример 4. Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью $v(t) = 3t^2 + 4t + 1$. Найдите закон изменения координаты точки $x(t)$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = 2$ с координата точки была равна $x = 3$ м.

Решение. Координата является первообразной скорости. Общий вид первообразной функции $v(t) = 3t^2 + 4t + 1$ следующий: $x(t) = t^3 + 2t^2 + t + C$.

Подставив в полученную формулу для координаты $t = 2$, $x = 3$, получим:

$3 = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 + C$, откуда $C = 15$. Таким образом, $x(t) = t^3 + 2t^2 + t + 15$.

Н

- 1 а) Что называется первообразной функции на данном интервале?
б) Однозначно ли определяется первообразная функции?
- 2 а) В чём заключается механический смысл первообразной?
б) Какие особенности имеет задача на применение механического смысла первообразной по сравнению с задачей на применение механического смысла производной?
- 3 Какие особенности имеют графики различных первообразных данной функции?
- 4 а) Сформулируйте теорему о разности двух первообразных.
б) Каков общий вид первообразной данной функции на интервале?
- 5 Сформулируйте основные теоремы о нахождении первообразных.

6 а) Как можно получить таблицу основных первообразных?

б) Выпишите таблицу основных первообразных.

7 Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью $v(t) = 1 + 2t$.

Найдите закон изменения координаты точки $x(t)$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = 1$ с координата точки была равна $x = 4$ м.

8 Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью $v(t) = t^2 + t + 1$. Найдите закон изменения координаты точки $x(t)$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = 10$ с координата точки была равна $x = 400$ м.

9 Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью $v(t) = 3t - \sin t$. Найдите закон изменения координаты точки $x(t)$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = 2\pi$ с координата точки была равна $x = 6\pi^2 + 2$ м.

10 Материальная точка движется по прямой с переменным ускорением $a(t) = 3t^3 + 2t^2 - 3t + 2$. Найдите закон изменения скорости точки $v(t)$, где v – скорость в момент времени t в м/с, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = 1,5$ с скорость точки была равна $v = \frac{387}{64}$ м/с.

11 Проверьте, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на указанном интервале.

а) $F(x) = \frac{7x+2}{5x+5}$; $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; интервал $(-\infty; -1)$;

б) $F(x) = \frac{11+8x}{6+4x}$; $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$; интервал $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$;

в) $F(x) = \frac{10-3x}{x-4}$; $f(x) = \frac{2}{(x-4)^2}$; интервал $(-\infty; 4)$;

г) $F(x) = \frac{7x-6}{3x+18}$; $f(x) = \frac{4}{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2}$; интервал $(-6; +\infty)$.

12 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $y = \sin 2x - \cos 3x$; в) $y = \frac{2}{\cos^2 x} - \sin \frac{x}{2}$;
б) $y = 2 \cos 2x + \sin x$; г) $y = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3} + \frac{1}{\sin^2 2x}$.

13 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $y = x^3 - \frac{3}{x^2}$; в) $y = \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{1}{x}$;
б) $y = 7x^6 - x^2 + 2x - 1$; г) $y = \frac{x^5 + x^3 + x}{x^3}$.

14 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $y = \cos x \cos 2x$; в) $y = \sin 3x \sin 4x$;
б) $y = \sin 2x \cos 4x$; г) $y = \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4}$.

15 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $y = e^{2x} + 2^x - \frac{1}{x}$; в) $y = \left(\frac{1}{3^x} + 2^{-2x} \right) 3^{-x}$;
б) $y = 3^x (2^x + 3^x)$; г) $y = 2(e^x + e^{-x})^2$.

16 Найдите ту первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, для которой выполняется указанное условие

а) $f(x) = 6x^2 + 6x + 2$; $F(3) = 6$; в) $f(x) = 1 + 2x^2 + 6x$; $F(-2) = 0$;
б) $f(x) = 7 + 8x + 4x^2$; $F(4) = \frac{1}{2}$; г) $f(x) = 10x^2 + 9x + 5$; $F(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

17 Найдите ту первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через указанную точку M .

а) $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$; $M(-1; 3)$; в) $f(x) = \cos x \sin 2x$; $M\left(\frac{\pi}{3}; 3\right)$;
б) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 2x$; $M(2; 10)$; г) $f(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$; $M(3; -20)$.

П

18 Проверьте, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на указанном интервале.

а) $F(x) = \frac{3+2x+2x^2}{7+4x+2x^2}$; $f(x) = \frac{2+4x(4+x)}{(7+2x(2+x))^2}$; интервал $(-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = \frac{5x^2+9x+6}{7x^2+9x+2}$; $f(x) = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{94}{(7x+2)^2} \right)$; интервал $(-1; +\infty)$;

в) $F(x) = \frac{6x+4}{8x^2+2x+2}$; $f(x) = \frac{1-4x(3x+4)}{(4x^2+x+1)^2}$; интервал $(0; +\infty)$;

г) $F(x) = \frac{6x^2+5x+1}{x^2+10}$; $f(x) = \frac{(118-5x)x+50}{(x^2+10)^2}$; интервал $(-\infty; 0)$.

19 Проверьте, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на указанном интервале.

а) $F(x) = \frac{\cos 2x}{\cos 6x}$; $f(x) = \frac{8 \sin 4x}{(1-2 \cos 4x)^2}$; интервал $\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right)$;

б) $F(x) = \frac{\sin^2 x - \cos 4x}{\sin 2x}$; $f(x) = 4 \cos 2x + \frac{1}{2 \sin^2 x}$; интервал $\left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$;

в) $F(x) = \left(\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos x - \sin 2x} \right)^2$; $f(x) = 8 \frac{\cos x + \sin 2x}{(1-2 \sin x)^3}$; интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right)$;

г) $F(x) = \frac{\operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x}$; $f(x) = -\frac{24 \sin 2x}{(3 \cos 2x + 1)^2}$; интервал $(1; 2)$.

20 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $f(x) = \frac{x}{2+3x+x^2}$;

в) $f(x) = \frac{6x-3}{6x^2+x-1}$;

б) $f(x) = \frac{x+2}{4x^2-1}$;

г) $f(x) = \frac{3}{x^2-7x+10}$.

21 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x \cos 2x$;

в) $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$;

б) $f(x) = \cos 3x \sin x \sin 4x$;

г) $f(x) = \cos^2 x \sin x$.

22 Найдите общий вид первообразной функции.

а) $f(x) = \sin^2 x$;

в) $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$;

б) $f(x) = \cos^2 x$;

г) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

23 Найдите ту первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через указанную точку M .

а) $f(x) = \cos^4 x - \frac{3}{8}$; $M\left(\frac{\pi}{12}; \frac{\sqrt{3}}{64}\right)$; в) $f(x) = \frac{2^{3x} + 3^{3x} + 2^{2x}3^{x+1} + 2^x3^{2x+1}}{2^{2x} + 2^{x+1}3^x + 3^{2x}}$; $M(-2; 5)$;

б) $f(x) = \frac{x+1}{9x^2-1}$; $M\left(\frac{1}{9}; 2\right)$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $M(12; \sqrt{23})$.

24 Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью $v(t) = \frac{9t^2 + 30t + 23}{(3t+5)^2}$. Найдите закон изменения координаты точки $x(t)$, где x –

расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения, если известно, что в момент времени $t = \frac{1}{3}$ с координата точки была равна

$x = 1$ м. В какой момент времени точка пройдет $\frac{4}{3}$ м? В какой момент времени её

ускорение равно $\frac{1}{18}$ м/с².

25 Материальная точка движется по прямой с переменным ускорением $a(t) = \alpha t + \beta$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. Найдите в общем виде закон изменения координаты точки $x(t)$ и ее скорости $v(t)$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, v – скорость в момент времени t в м/с, t – время в секундах, если известно, что в момент времени $t = 0$ точка двигалась со скоростью v_0 м/с и прошла расстояние s_0 .

M

26 Найдите первообразную функции.

а) $y = \sin^4 x$;

в) $y = \sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x$;

б) $y = \cos^4 x$;

г) $y = \operatorname{tg}^2 x$.

27 Одиннадцатиклассник Валя утверждает, что придумал пример, опровергающий теорему о разности двух первообразных. Для функции $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ одной из

первообразных является функция $F_1(x) = \frac{1}{x}$, а ещё одной первообразной является

$$\text{функция } F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, & \text{если } x > 0, \\ \frac{1}{x} + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, разность этих функций не равна нулю. Согласны ли вы с Валей?

28 Одиннадцатиклассница Варя, занимаясь нахождением первообразных, получила следующий странный результат.

С одной стороны, т.к. $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$, то общий вид первообразной функции $\sin 2x$ следующий: $F(x) = \sin^2 x + C$.

С другой стороны, мы знаем, что первообразной функции $\sin x$ является функция $-\cos x$, значит, по теореме о линейной замене аргумента общий вид первообразной функции $\sin 2x$ следующий: $F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Получается, что $\sin^2 x = -\frac{1}{2} \cos 2x$, или $\cos 2x = -2 \sin^2 x$, что явно неверно.

Помогите Вале разобраться с этой ситуацией.

2.2. Интеграл

С рассмотренным в предыдущем параграфе понятием первообразной тесно связана очень важная в математике задача о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает во всех его точках положительные значения. Изобразим график функции $y = f(x)$ и рассмотрим закрашенную на рис. 2.1 фигуру. Её принято называть криволинейной трапецией, поскольку она ограничена двумя параллельными отрезками («основаниями»), перпендикулярным им отрезком оси Ox и кривой – графиком функции $y = f(x)$, играющими роль «боковых сторон».

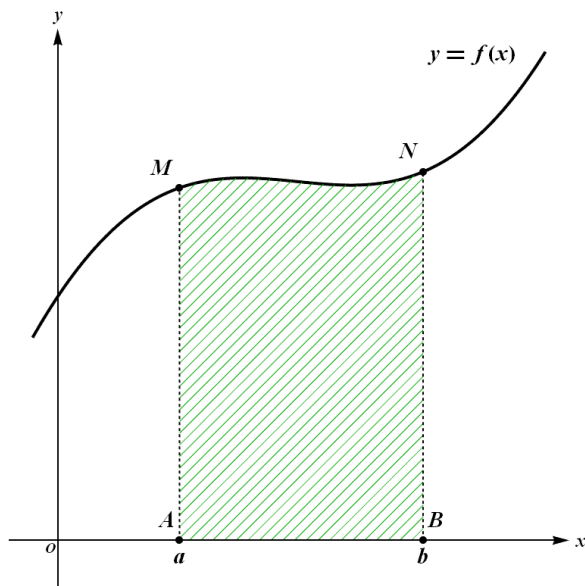


Рис. 2.1

Докажем, что площадь криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле $S = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Заметим, что разность $F(b) - F(a)$ часто называют *приращением первообразной* функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Возьмём внутри отрезка $[a; b]$ произвольную точку x , проведём через неё прямую, параллельную оси Oy , и обозначим через $S(x)$ площадь части начальной криволинейной трапеции, расположенной левее проведённой прямой (рис. 2.2 а).

Докажем, что производная функции $S(x)$ равна $f(x)$.

Доказательство проведём по определению производной. Выберем произвольную точку x внутри отрезка $[a; b]$. Возьмём приращение аргумента Δx , так чтобы точка $x + \Delta x$ тоже лежала внутри отрезка $[a; b]$, и рассмотрим соответствующее ему приращение функции: $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$. На рис. 2.2 б взято $\Delta x > 0$, но при $\Delta x < 0$ можно провести точно такие же рассуждения.

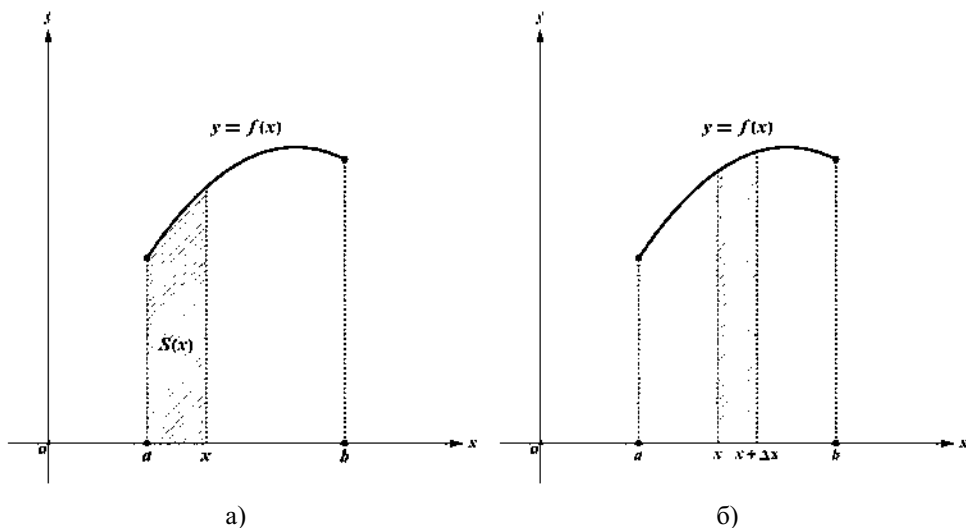


Рис. 2.2

Понятно, что ΔS представляет собой площадь криволинейной трапеции с «боковой стороной» Δx , заключённой между вертикальными прямыми, проходящими через точки x и $x + \Delta x$, лежащие на оси абсцисс. Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она непрерывна и на отрезке $[x; x + \Delta x]$ и по второй теореме Вейерштрасса достигает на нём своего наименьшего и наибольшего значений; пусть они равны соответственно m и M . Тогда площадь криволинейной трапеции, закрашенной на рис. 2.2 б, больше площади прямоугольника с основанием Δx и высотой m , но меньше площади прямоугольника с основанием Δx и высотой M : $m \cdot \Delta x < \Delta S < M \cdot \Delta x$. Деля все части этого неравенства на положительное число Δx , получим: $m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M$. Переходя к пределу при Δx , стремящемся к нулю, мы получим, что поскольку правый конец отрезка $[x; x + \Delta x]$ при этом будет стремиться к точке x , числа m и M будут стремиться к $f(x)$, и по теореме о трёх пределах получим, что существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$, причём тоже равный $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x).$$

Но предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x}$ и есть производная функции $S(x)$ в точке x . Итак, доказано, что $S'(x) = f(x)$. Это значит также, что функция $S(x)$ является первообразной функции $f(x)$. По теореме о разности двух первообразных заключаем, что $S(x) = F(x) + C$.

Из геометрических соображений понятно, что $S(a)=0$ и $S(b)=S$ – площади начальной криволинейной трапеции. Подставляя в формулу $S(x)=F(x)+C$ сначала $x=a$, получим $S(a)=F(a)+C$, или т.к. $S(a)=0$, то $C=-F(a)$. Теперь, переписав формулу $S(x)=F(x)+C$ в виде $S(x)=F(x)-F(a)$ и подставляя в неё $x=b$, получим $S(b)=F(b)-F(a)$, или т.к. $S(b)=S$, то $S=F(b)-F(a)$, что и требовалось доказать.

Приращение первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е. разность $F(b)-F(a)$, настолько часто встречается при решении задач, что для неё используется специальное обозначение: $F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$.

С помощью этого обозначения доказанный результат можно сформулировать в виде:

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, может быть вычислена по формуле $S=F(x)\Big|_a^b$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Пример 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=2^x$, осью абсцисс и прямыми $x=-2$ и $x=1$ (рис. 2.3).

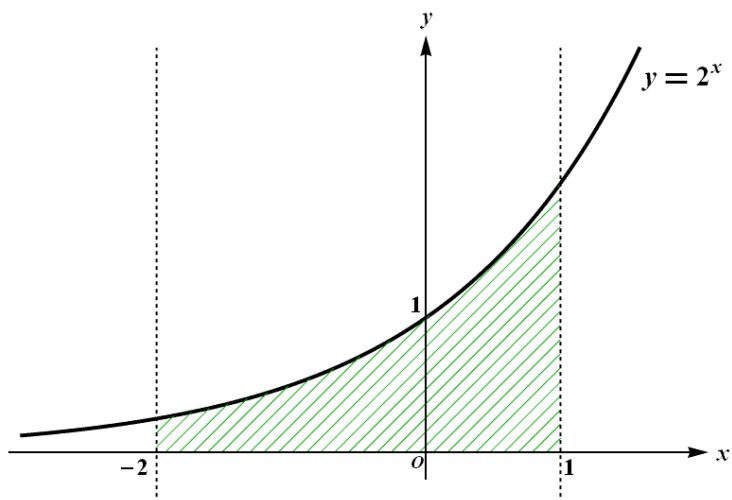


Рис. 2.3

Решение. Фигура, площадь которой нужно найти, является криволинейной трапецией. Из рис. 2.3 видно, что в нашем случае $f(x) = 2^x$, $a = -2$, $b = 1$. Найдём первообразную функции $f(x) = 2^x$ (заметим, что в таких задачах нужен не общий вид первообразной, а какая-нибудь первообразная): $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$. Нужная нам

площадь находится по формуле $S = F(x) \Big|_a^b$, которая для нашего случая имеет вид:

$$S = \left(\frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{\ln 2} \cdot (2^x) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{\ln 2} \cdot (2^1 - 2^{-2}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4 \ln 2}.$$

Ответ: $\frac{3}{4 \ln 2}$.

Обсудим другой подход к задаче нахождения площади криволинейной трапеции, напоминающий подход к нахождению площади круга, который мы обсуждали в параграфе 1.5.

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n произвольных частей точками $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1}$. Для одинаковости обозначений удобно считать, что $a = x_0$; $b = x_n$. Длину первого из образованных отрезков разбиения обозначим Δx_1 , второго – Δx_2 , и т.д., вплоть до последнего, n -го; его длину обозначим Δx_n :

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0; \Delta x_2 = x_2 - x_1; \dots; \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Выберем внутри каждого из отрезков разбиения произвольную точку: внутри первого точку t_1 , внутри второго – t_2 , и т.д., вплоть до последнего, n -го; внутри него выберем точку t_n . На рис. 2.4 взято $n = 5$.

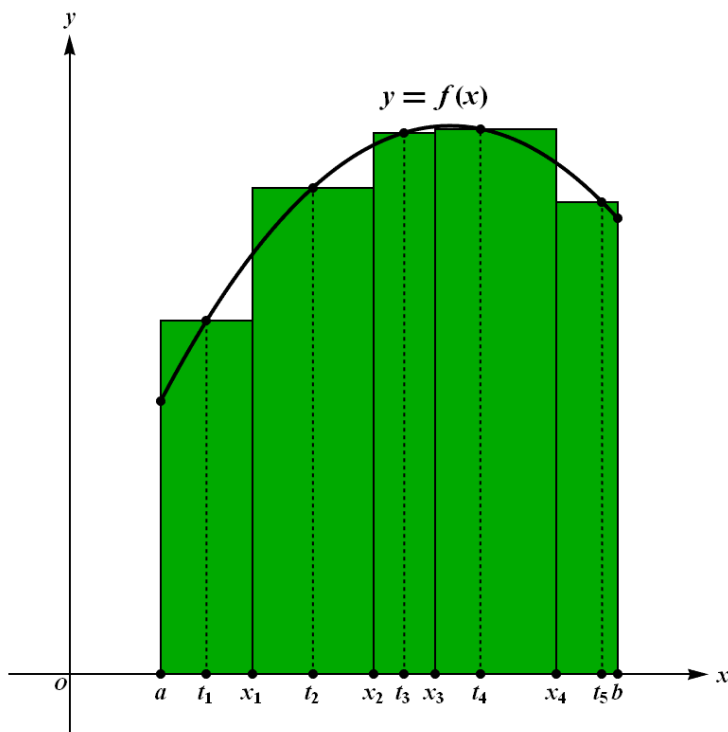


Рис. 2.4

Рассмотрим прямоугольники с основаниями $\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n$ и высотами $f(t_1); f(t_2); \dots; f(t_n)$. Их площади равны соответственно $f(t_1)\Delta x_1; f(t_2)\Delta x_2; \dots; f(t_n)\Delta x_n$, а общая площадь ступенчатой фигуры равна сумме площадей всех этих прямоугольников:

$$S_n = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n.$$

Понятно, что площадь ступенчатой фигуры можно считать приближённо равной площади криволинейной трапеции, $S_n \approx S$, причём это приближённое равенство тем точнее, чем больше n .

Можно доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то при $n \rightarrow \infty$, причём таким образом, что длины всех отрезков разбиения стремятся к нулю (пишут: $\max \Delta x_i \rightarrow 0$), существует предел величины S_n , причём этот предел не зависит от разбиения отрезка $[a; b]$ на части точками

$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и от выбора точек $t_1; t_2; \dots; t_n$ внутри этих частей. Такой предел и принимается за площадь криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} (f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n)$$

Сумма $S_n = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n$ называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а её предел называется *интегралом* от функции

$f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Знак $\int$ называется *знаком интеграла*, а числа a и b – *пределами интегрирования* (соответственно нижним и верхним). Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Таким образом, можно сказать, что площадь рассматриваемой криволинейной трапеции равна интегралу от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ (или, по-другому, интегралу от функции $f(x)$ в пределах от a до b): $S = \int_a^b f(x)dx$. Поскольку ранее доказано, что площадь этой криволинейной трапеции равна также приращению первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, т.е. $S = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, то получаем формулу для вычисления интеграла, называемую *формулой Ньютона–Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Эта формула относится к основным формулам математического анализа.

Хотя у нас интеграл возник в процессе вычисления площади криволинейной трапеции, его можно рассматривать для любой непрерывной функции на любом отрезке, составив интегральную сумму и рассмотрев её предел при тех условиях, которые указаны выше. Любой интеграл от непрерывной функции может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница (естественно, если мы сможем найти первообразную).

При вычислении многих интегралов полезны формулы:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx ;$$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx .$$

Эти формулы могут быть прочитаны так: «интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов» и «постоянный множитель можно выносить за знак интеграла».

Они следуют из формулы Ньютона–Лейбница и соответствующих свойств первообразной: «первообразная суммы (разности) равна сумме (разности) первообразных» и «если функцию умножить на ненулевую постоянную, то и её первообразная тоже умножится на эту постоянную».

Пример 2. Вычислите интеграл: $\int_1^9 \sqrt{x} dx$.

Решение. Запишем подынтегральную функцию в виде $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, тогда одной из её первообразных является функция $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$. Теперь по формуле Ньютона–

Лейбница имеем: $\int_4^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}$.

Ответ: $\frac{38}{3}$.

Пример 3. Вычислите интеграл: $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$.

Решение. Прежде всего, заметим, что предложенный интеграл чаще записывают в виде $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ перемножая подынтегральную функцию $\frac{1}{x}$ с выражением dx .

Первообразной функции $\frac{1}{x}$ является функция $\ln|x|$, поэтому по формуле Ньютона–

Лейбница имеем: $\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3 - 0 = \ln 3$.

Ответ: $\ln 3$.

Н

- 1 а) Что называется интегральной суммой для непрерывной функции на отрезке?
б) Что называется интегралом от непрерывной функции по отрезку?
в) Что называется пределами интегрирования?
- 2 а) Какая фигура называется криволинейной трапецией?
б) Как можно найти площадь криволинейной трапеции?
- 3 а) Запишите формулу для нахождения площади криволинейной трапеции через приращение первообразной.
б) Запишите формулу для нахождения площади криволинейной трапеции через интеграл.
в) Как связаны между собой записанные вами формулы?
- 4 а) Запишите формулу Ньютона–Лейбница.
б) Как выводится формула Ньютона–Лейбница?
- 5 а) Сформулируйте основные теоремы о нахождении интегралов.
б) Из каких теорем выводятся сформулированные вами теоремы?

6 Найдите интеграл.

- а) $\int_{-\pi}^0 \cos x \, dx$; в) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$; д) $\int_{-1}^1 x^2 \, dx$;
б) $\int_{-3}^1 x^3 \, dx$; г) $\int_0^1 10^x \, dx$; е) $\int_{-5}^{-3} x^3 - x \, dx$.

7 Найдите интеграл.

- а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x) \, dx$; в) $\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin x \right) \, dx$;
б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos 3x + 2 \cos x) \, dx$; г) $\int_0^1 (2 \cos \pi x - 2 \sin \pi x) \, dx$.

8 Найдите интеграл.

- а) $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{3}{x^2} \right) \, dx$; в) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x + 6) \, dx$;
б) $\int_0^1 \frac{1}{(x+5)^2} \, dx$; г) $\int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} (4x^3 - 6x^5) \, dx$.

9 Найдите интеграл.

а) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx;$

в) $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos 3x + x^3) dx;$

б) $\int_{10}^{100} \left(10^{-\frac{x}{10}} \ln 10 + x \right) dx;$

г) $\int_2^4 \left(\frac{4}{(x-1)^3} - \frac{49}{(x+1)^3} \right) dx.$

10 Найдите интеграл.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + \sin x)^2 dx;$

в) $\int_{-1}^2 \frac{2x+1}{x+5} dx;$

б) $\int_2^6 \frac{4x^4 + 3x^3 - x}{x^6} dx;$

г) $\int_0^6 (x-3)^3 dx.$

11 Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

а) $y = 1 - x^2, x = 0, x = 1;$

в) $y = \frac{2}{x} + x, x = 1, x = e;$

б) $y = \cos x + 2, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi;$

г) $y = x^3 - 3x + 2, x = -1, x = 2.$

12 Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

а) $y = \cos x \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2};$

в) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{2x}}, x = \frac{1}{8}, x = \frac{1}{4};$

б) $y = 2^x - 2x, x = 0, x = 1;$

г) $y = \frac{5x}{4x-1}, x = \frac{1}{2}, x = 2.$

II

13 Найдите интеграл.

а) $\int_{-2}^2 12(x-5)(x+6)x dx;$

в) $\int_1^3 (x-2)^{10} dx;$

б) $\int_{-1}^0 (x-1)(x+1)(x^2+1) dx;$

г) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{5+3x^2+4x^3+3x^4}{x^6} dx.$

14 Найдите интеграл.

а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} 14 \sin 3x \cos 4x dx$;

в) $\int_{5\pi}^{15\pi} \sin \frac{x}{5} \sin \frac{x}{3} dx$;

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 7x \cos 2x dx$;

г) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos 4x \sin \frac{x}{2} dx$.

15 Найдите интеграл.

а) $\int_0^{\pi} \sin x \cos 2x \sin 3x dx$;

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 x \sin x dx$;

б) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 12x \cos 6x \sin 3x dx$;

г) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \sin 2x \cos 2x dx$.

16 Найдите интеграл.

а) $\int_4^{16} \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} dx$;

в) $\int_1^9 \frac{x-1}{x+x\sqrt{x}} dx$;

б) $\int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} dx$;

г) $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \right) \left(\sqrt[3]{x^2} + x + \sqrt[3]{x^4} \right) dx$.

17 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$.

18 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos \pi x - \cos \frac{\pi x}{2} - 1$, $y = 0$,

$x = -\frac{4}{3}$, $x = 0$.

M

19 Найдите интеграл.

а) $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx$;

в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 - 2 \cos x)^2 (2 \cos 3x - 1) dx$;

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^6 x + \sin^6 x) dx$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x (1 - 2 \sin 6x - 2 \sin 8x - 2 \sin 10x) dx$.

20 Докажите, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos^6 x - \sin^6 x - 15 \sin^2 x \cos^4 x + 15 \sin^4 x \cos^2 x$, $x = -\frac{\pi}{24}$, $x = \frac{\pi}{24}$, $y = 0$ более чем в 114 раз больше площади фигуры, ограниченной линиями $y = \left(1 + 2 \cos \frac{x}{24}\right) \left(\cos \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{4} + \cos \frac{7x}{24}\right)$, $x = -2\pi$, $x = 2\pi$, $y = 0$.

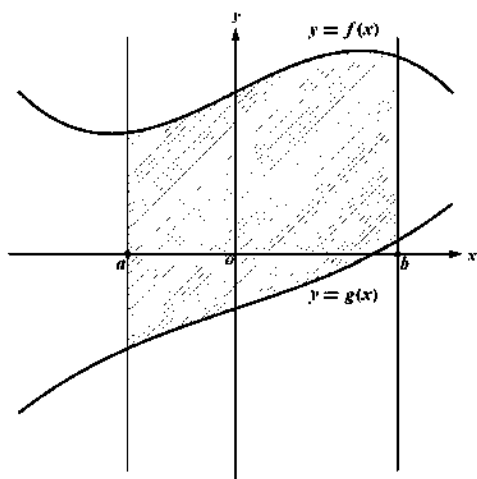
2.3. Применения интеграла

Ещё раз вернёмся к вопросу о вычислении площадей. При решении многих задач удобно использовать более общую формулу, которую можно получить на основе выведенной в предыдущем параграфе.

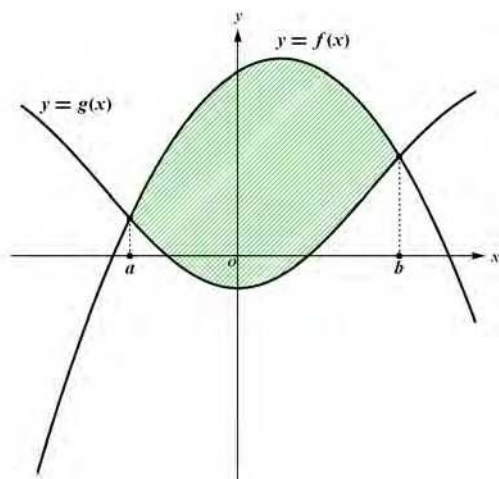
Эта формула применима для четырёх видов фигур, изображённых на рис. 2.5 и рис. 2.6. Фигура, изображённая на рис. 2.5 а ограничена сверху и снизу графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а слева и справа – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно. Она тоже называется криволинейной трапецией, но уже *криволинейной трапецией общего вида*: у неё обе «боковые стороны» криволинейны. Не предполагается никаких ограничений на знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Заметим, что рассмотренная в предыдущем параграфе криволинейная трапеция называется криволинейной трапецией специального вида.

Фигура, изображённая на рис. 2.5 б ограничена сверху и снизу графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ соответственно, пересекающимися в точках с абсциссами a и b . Такая фигура часто называется *линзой*.



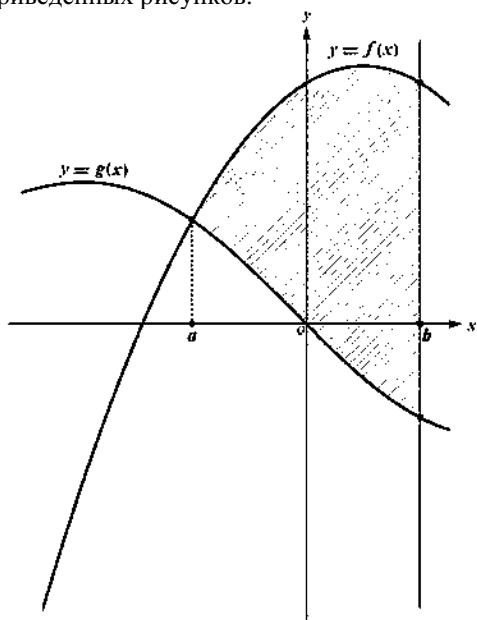
а)



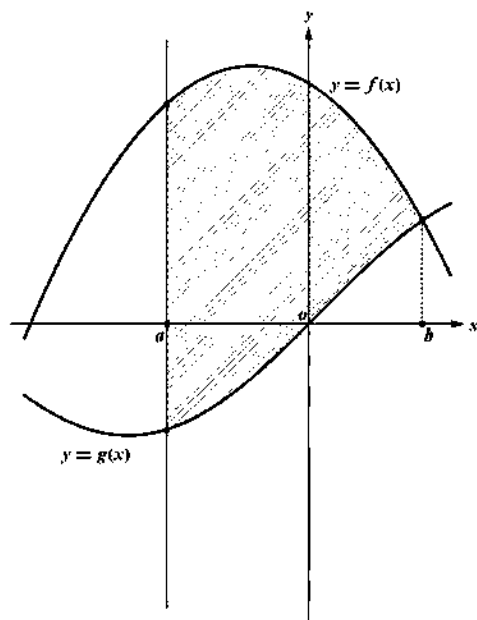
б)

Рис. 2.5

Наконец, фигуры, изображённые на рис. 2.6, называются *криволинейными треугольниками*. Их устройство не требует особых пояснений, оно понятно из приведённых рисунков.



а)



б)

Рис. 2.6

Площади всех четырёх видов фигур, изображённых на рис. 2.5 и рис. 2.6, вычисляются по одной и той же формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Выполним доказательство, скажем, для линзы (для остальных фигур оно аналогично). Т.к. функция $y = g(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на нём, т.е. существует такое действительное число h , что $g(x) > h$ при всех $x \in [a; b]$. Т.к. график функции $y = f(x)$ лежит выше графика функции $y = g(x)$, то также и $f(x) > h$ при всех $x \in [a; b]$.

Рассмотрим функции $y = g(x) - h$ и $y = f(x) - h$. Обе они положительны на отрезке $[a; b]$. Рассмотрение этих функций равносильно параллельному переносу нашей фигуры на вектор $\vec{m}(0; -h)$, от чего её площадь не изменится (рис. 2.7 а, б).

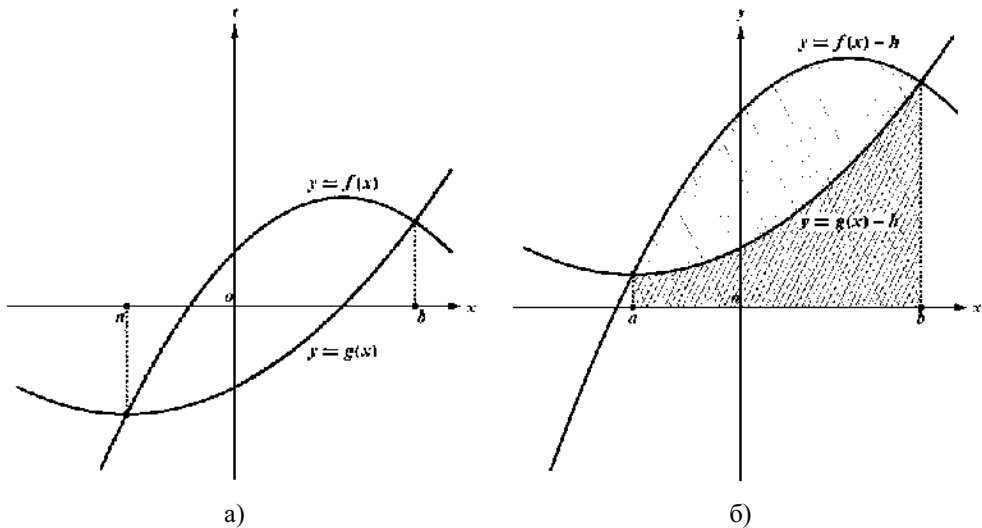


Рис. 2.7

Но площадь линзы на рис. 2.7 б равна разности площадей криволинейных трапеций изученного в предыдущем параграфе специального вида, заштрихованных разными штриховками. Поскольку по доказанной в предыдущем параграфе формуле

площади этих криволинейных трапеций равны соответственно $\int_a^b (f(x) - h) dx$ и

$\int_a^b (g(x) - h) dx$, интересующая нас площадь равна разности этих выражений:

$$\int_a^b (f(x) - h) dx - \int_a^b (g(x) - h) dx = \int_a^b ((f(x) - h) - (g(x) - h)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx ,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найдите площадь под одной аркой синусоиды $y = \sin x$ (рис. 2.8).

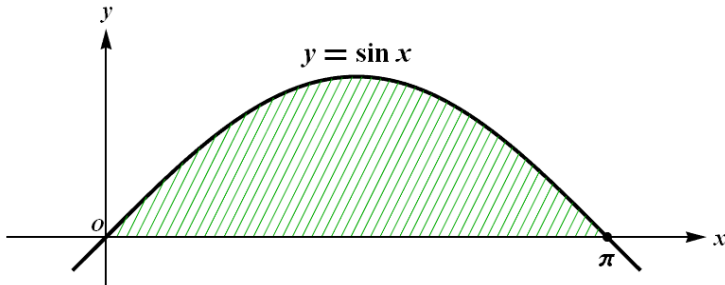


Рис. 2.8

Решение. По нашей терминологии нам нужно найти площадь линзы. Из рис. 2.8 видно, что в нашем случае $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$, $a = 0$, $b = \pi$.

$$\text{Имеем: } S = \int_0^{\pi} (\sin x - 0) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2 .$$

Ответ: 2.

Пример 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x + 1$ и прямой $y = x - 3$.

Решение. Здесь прежде всего нужно построить графики. Вершина параболы находится в точке $(2; 5)$, а её ветви направлены вниз. Из рис. 2.9 видно, что в нашем случае мы имеем дело с линзой, у которой $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ (верхний график), $g(x) = x - 3$ (нижний график).

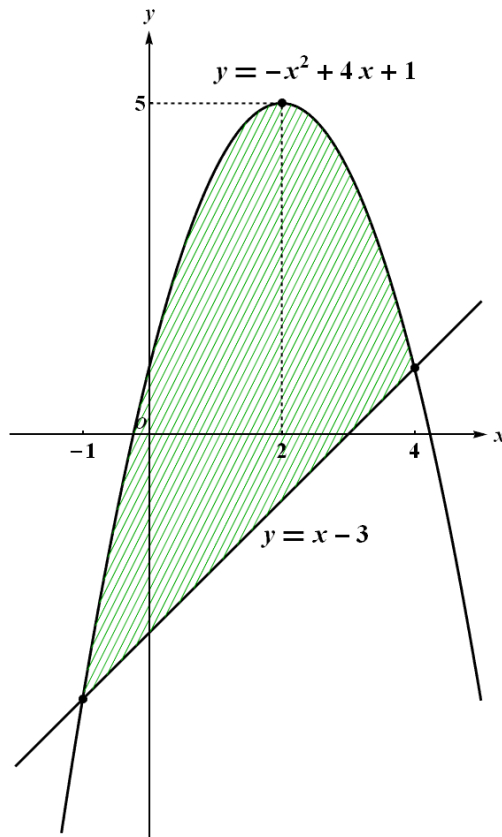


Рис. 2.9

Пределы интегрирования найдём, решая систему уравнений: $\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 1; \\ y = x - 3. \end{cases}$

Вычитая из второго уравнения первое, получим квадратное уравнение: $x^2 - 3x - 4 = 0$, корни которого -1 и 3 . Теперь находим площадь

$$\begin{aligned} S &= \left(\int_{-1}^3 (-x^2 + 4x + 1) - (x - 3) \right) dx = \int_{-1}^3 (-x^2 + 3x + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-1}^3 = \\ &= \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2} + 12 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right) = 18\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $18\frac{2}{3}$.

Обсудим применение интеграла для вычисления работы переменной силы, действующей вдоль прямой перемещения материальной точки. Из курса физики вы знаете, что если постоянная сила величиной F действует вдоль прямой, по которой точка перемещается на расстояние s , то работа этой силы находится по формуле $A = Fs$.

Предположим, что точка переместилась по оси Ox из положения a в положение b под действием переменной силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ox (рис. 2.10 а). При этом известно, что функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Требуется найти работу этой переменной силы.

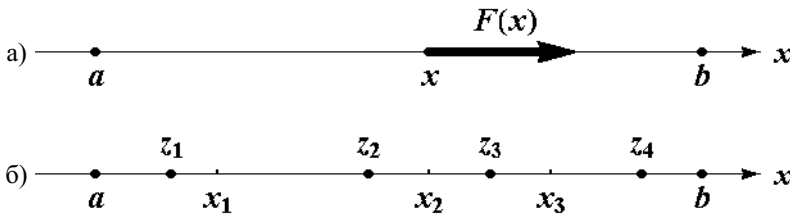


Рис. 2.10

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Длину первого из образованных отрезков разбиения обозначим Δx_1 , второго – Δx_2 , и т.д., вплоть до последнего, n -го; его длину обозначим Δx_n :

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0; \Delta x_2 = x_2 - x_1; \dots; \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Выберем внутри каждого из отрезков разбиения произвольную точку: внутри первого точку z_1 , внутри второго – z_2 , и т.д., вплоть до последнего, n -го; внутри него выберем точку z_n . На рис. 2.10 б взято $n = 4$.

Будем считать, что на каждом отрезке разбиения сила постоянна – такая же, как в точке z_i , где i – номер отрезка разбиения, т.е. на всём отрезке разбиения с номером i точка движется под действием силы $F(z_i)$. Т.к. перемещение точки на этом отрезке составляет Δx_i , то силой выполняется работа, равная $F(z_i)\Delta x_i$. Общая работа по перемещению точки из положения a в положение b будет равна сумме этих величин, т.е. $F(z_1)\Delta x_1 + F(z_2)\Delta x_2 + \dots + F(z_n)\Delta x_n$. Понятно, что это приближённое значение искомой работы. Обозначив его A_n , получим, что $A_n \approx A$, причём это приближённое равенство тем точнее, чем больше n . Поскольку A_n является интегральной суммой для непрерывной функции $F(x)$ на отрезке $[a; b]$, то при $n \rightarrow \infty$, так что

$\max \Delta x_i \rightarrow 0$, существует предел этой интегральной суммы, причём не зависящий от разбиения отрезка $[a; b]$ на части и от выбора точек $z_1; z_2; \dots; z_n$ внутри этих частей. Этот предел равен интегралу от функции $F(x)$ по отрезку $[a; b]$. Этот интеграл и равен искомой работе:

$$A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} A_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} (F(z_1)\Delta x_1 + F(z_2)\Delta x_2 + \dots + F(z_n)\Delta x_n) = \int_a^b F(x)dx.$$

Пример 3. Сила величиной 10 Н сжала пружину из ненапряжённого состояния на 4 см. Какая при этом была выполнена работа?

Решение. По закону Гука для растяжения пружины на величину x требуется приложить силу величиной $F(x) = kx$, где k – коэффициент пропорциональности.

У нас при $x = 0,04$ м сила $F = 10$ Н, откуда находим коэффициент пропорциональности: $k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0,04} = 250$.

Теперь находим работу как интеграл от силы: $A = \int_a^b F(x)dx$

У нас $a = 0$; $b = 0,04$; $F(x) = kx = 250x$, значит:

$$A = \int_0^{0,04} 250x dx = 250 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 125x^2 \Big|_0^{0,04} = 125 \cdot 0,04^2 = 0,2 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 0,2 Дж.

Пример 4. Какую работу придётся выполнить, чтобы полностью погрузить в воду плавающий на её поверхности невесомый кубик со стороной 10 см?

Решение. Здесь работу совершает сила, равная по величине и противоположная по направлению архимедовой силе. При погружении кубика в воду на x м (считаем, что верхняя грань кубика параллельна поверхности воды) объём вытесненной им воды равен $0,1 \cdot 0,1 \cdot x = 0,01x$ (м³). Т.к. удельная масса воды составляет 1000 кг/м³, то масса этой воды составляет 10х кг. Таким образом, величина архимедовой силы (а значит и силы, совершающей работу по погружению кубика в воду) равна $F(x) = 10gx$ (Н). Для плавающего кубика $x = 0$, а для полностью погружённого в воду $x = 0,1$ м. Беря $g \approx 9,8$ м/с², получим:

$$A = \int_0^{0,1} 10gx dx \approx \int_0^{0,1} 98x dx = 98 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,1} = 49x^2 \Big|_0^{0,1} = 49 \cdot 0,1^2 = 0,49 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 0,49 Дж.

Н

- 1 а) Какая фигура называется криволинейной трапецией специального вида?
б) Какая фигура называется криволинейной трапецией общего вида?
в) Какая фигура называется линзой?
г) Какая фигура называется криволинейным треугольником?
- 2 а) Как находится площадь криволинейной трапеции специального вида?
б) Как находится площадь криволинейной трапеции общего вида?
в) Как находится площадь линзы?
г) Как находится площадь криволинейного треугольника?
- 3 а) Какая сила называется переменной?
б) Приведите несколько примеров переменной силы.
в) Как находится работа переменной силы, перемещающей точку вдоль прямой?
- 4 Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.
а) $y = e^{2x}$; $y = e^{-x}$; $x = 0$; $x = 1$;
б) $y = \sin x - 1$; $y = \cos x$; $x = -\pi$; $x = \frac{\pi}{2}$;
в) $y = x^2 + 1$; $y = 1 - x^2$; $x = -2$; $x = -1$;
г) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{2}{x}$; $x = 2$; $x = 3$.
- 5 Найдите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.
а) $y = x^3 + x^2$; $y = -x^3 + x^2$; $x = 0$; $x = 1$;
б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$; $y = 5x - x^3$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{3}{2}$;
в) $y = \frac{3+2x}{x-2}$; $y = \frac{2x-3}{2+x}$; $x = -4$; $x = -3$;
г) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y = \frac{1}{\sin^2 x}$; $x = -\frac{\pi}{4}$; $x = -\frac{\pi}{6}$.
- 6 Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = 3x + 2$.
- 7 Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 5x + 4$ и прямой $y = 2x + 6$.
- 8 Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x^2 - 6x - 2$ и прямой $y = -2x + 13$.

9 Найдите площадь фигуры, ограниченной параблами $y = x^2 + 2x$ и $y = -x^2 + 3x + 1$.

10 Найдите площадь фигуры, ограниченной параблами $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 10$ и $y = -2x^2 + 2x + 1$.

11 Найдите площадь фигуры, ограниченной параблами $y = -2x^2 - 7x + 5$ и $y = x^2 + 5x - 10$.

12 Сила величиной 223 Н сжала пружину из ненапряжённого состояния на 20 см. Какая при этом была выполнена работа?

13 Сила величиной 300 Н сжала пружину, первоначальная длина которой составляла 2 м в ненапряжённом состоянии, до 1,77 м. Какая при этом была выполнена работа?

П

14 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y = 2^x$; $y = 3^x$; $x = -2$;

б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y = 2 - x$;

в) $y = \frac{1}{x}$; $y = 3 - \frac{1}{x}$; $x = \frac{3}{2}$;

г) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $y = 3 - \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x = 1$.

15 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

а) $y = x^3 - x$; $y = 1 - x^2$;

б) $y = x^4 + x^2$; $y = 8 - x^2$;

в) $y = x^2 - \frac{1}{4}$; $y = \cos \pi x$;

г) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; $y = 3 - x$.

16 Чтобы растянуть пружину из недеформированного состояния на l см, понадобилось выполнить работу величиной A Дж. Какую работу понадобится выполнить, чтобы растянуть пружину ещё на l см?

17] Чтобы растянуть пружину из деформированного состояния в 3 см до 10 см, понадобилось выполнить работу величиной A Дж. Какую работу понадобилось выполнить, чтобы растянуть пружину из недеформированного состояния на 3 см?

М

18] Какую работу придётся выполнить, чтобы полностью погрузить в воду плавающий на её поверхности невесомый шарик радиуса 10 см?

19] В жидкости с удельной массой ρ_1 плавает шарик радиуса R , изготовленный из материала с удельной массой ρ_2 , где $\rho_2 < \rho_1$. Какую работу нужно совершить, чтобы полностью погрузить этот шарик в жидкость?

ГЛАВА III

Решение уравнений, неравенств и систем

3.1. Показательные и логарифмические уравнения

Показательным уравнением будем называть уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени, а *логарифмическим* – уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма (в основании и/или подлогарифмическом выражении).

Примеры показательных уравнений: $2^x = 32$; $4^x + 4^{x+1} = 20$; $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$.

Примеры логарифмических уравнений: $\log_2(x^2 - 4x + 11) = 3$; $\lg^2 x - 5 \lg x + 4 = 0$.

Мы уже видели, что неалгебраические уравнения решают так же, как и алгебраические: с помощью тождественных преобразований пытаются свести уравнение к уравнению стандартного вида, – такому уравнению, которое мы уже умеем решать.

Начнём с показательных уравнений.

Уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, будем называть показательным уравнением *стандартного вида*.

Показательная функция монотонна на всей своей области определения – множестве действительных чисел, поэтому каждое своё значение на этом множестве она принимает ровно один раз, то есть $a^m = a^n$ тогда и только тогда, когда $m = n$.

Следовательно, уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Представим это утверждение в виде схемы.

Схема 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Пример 1. Решите уравнение $3^{x^2-2} = 3^{1-2x}$.

Решение. Уравнение стандартного вида $3^{x^2-2} = 3^{1-2x}$ в данном случае равносильно уравнению $x^2 - 2 = 1 - 2x$, откуда $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Корни квадратного уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Ответ: 1 и -3 .

В дальнейшем, решая более сложные уравнения, мы будем стараться представить обе части уравнения в виде степеней с одним и тем же основанием a , где a – положительное число, не равное 1. Если после этого приравнять показатели степени, может получиться более простой тип уравнений.

Сформулируем аналогичные утверждения для логарифмических уравнений.

Уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, будем называть логарифмическим уравнением *стандартного вида*.

Логарифмическая функция монотонна на всей своей области определения – множестве положительных действительных чисел, поэтому каждое своё значение на этом множестве она принимает ровно один раз, то есть $\log_a m = \log_a n$ тогда и только тогда, когда $m = n$, $m > 0$, $n > 0$.

Следовательно, уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$, при условии, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Представим это утверждение в виде схемы.

Схема 2. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 2) = \log_2(1 - 2x)$.

Решение. Уравнение стандартного вида $\log_2(x^2 - 2) = \log_2(1 - 2x)$ равносильно целому рациональному уравнению $x^2 - 2 = 1 - 2x$, откуда $x^2 + 2x - 3 = 0$, при условии $1 - 2x > 0$.

Корень $x_1 = 1$ – посторонний, так как не верно, что $1 - 2 \cdot 1 > 0$.

Корень $x_2 = -3$, условию удовлетворяет: $1 - 2 \cdot (-3) = 7 > 0$

Ответ: -3 .

Как мы видим из примера 2, при переходе от стандартного логарифмического уравнения к алгебраическому уравнению (схема 2) действительно могут появиться посторонние корни, поэтому очень важно проверять ограничения.

Пример 3. Решите уравнение

$$5^{x-1} \cdot 4^x = 0,2 \cdot 20^{3-4x}.$$

Решение. Преобразуем уравнение к стандартному виду.

Цель – уравнение $20^{f(x)} = 20^{g(x)}$:

$$0,2 \cdot 5^x \cdot 4^x = 0,2 \cdot 20^{3-4x},$$

$$5^x \cdot 4^x = 20^{3-4x}, \quad 20^x = 20^{3-4x}.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению $x = 3 - 4x$ (схема 1), откуда $x = 0,6$.

Ответ: 0,6.

В следующем примере, чтобы привести уравнение к стандартному виду потребовалось разложить левую часть уравнения на множители.

Пример 4. Решите уравнение $4^{x+1} + 4^{x-1} = 34$.

Решение. Вынесем множитель 4^{x-1} в левой части уравнения за скобки:

$$4^{x-1}(4^2 + 1) = 34, \quad 4^{x-1} = 2.$$

Получили стандартное уравнение:

$$2^{2x-2} = 2^1.$$

Следовательно, $2x - 2 = 1$, откуда $x = 1,5$ (схема 1).

Ответ: 1,5.

Пример 5. Решите уравнение: $\lg(x^2 - 3x + 1) = \lg(2x - 3)$.

Решение. Уравнение уже имеет требуемый вид: $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a = 10$.

Следовательно, оно равносильно уравнению $x^2 - 3x + 1 = 2x - 3$ при условии $2x - 3 > 0$ (схема 2).

Решив квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$, получим корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, из которых условию $x > 1,5$ удовлетворяет только $x_2 = 4$.

Ответ: 4.

В следующем примере по ходу решения приходится три раза приводить уравнение к стандартному виду (схема 2).

Пример 5. Решите уравнение $\log_2 \log_2 \log_2 x = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в стандартном виде:

$$\log_2(\log_2 \log_2 x) = \log_2 2.$$

В полученном стандартном уравнении $\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$:

$f(x) = \log_2 \log_2 x$, а $g(x) = 2$, поэтому условие $f(x) > 0$ очевидно выполняется.

Получим равносильное уравнение $\log_2 \log_2 x = 2$, которое также перепишем в стандартном виде:

$$\log_2(\log_2 x) = \log_2 4.$$

Здесь в уравнении $\log_2 f(x) = \log_2 g(x)$:

$f(x) = \log_2 x$, а $g(x) = 4$, поэтому условие $f(x) > 0$ также выполняется.

И, наконец, получим равносильное уравнение $\log_2 x = 4$, откуда $x = 16$.

Ответ: 16.

Пример 6. Решите уравнение: $\log_2(2x+1) - \log_2(x+3) = 2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\log_2(2x+1) = \log_2(x+3) + \log_2 4,$$

$$\log_2(2x+1) = \log_2(4x+12).$$

Последнее уравнение равносильно системе (схема 2):

$$\begin{cases} 2x+1 = 4x+12, \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -11, \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

Заметим, что уравнение системы противоречит условию $2x+1 > 0$.

Ответ: корней нет.

В заключение заметим, что деление уравнений на логарифмические и показательные носит искусственный характер.

В частности, это происходит потому, что некоторые логарифмические уравнения удаётся решить только с применением свойств показательных функций, а при решении многих показательных уравнений нужны логарифмы.

Приведём один пример на эту тему.

Пример 7. Решите уравнение: $2^{3x-1} = 5^{\frac{1-3x}{x}}$.

Решение. Перед нами показательное уравнение, но непонятно как привести его к стандартному виду.

Прологарифмируем обе части уравнение по основанию 5

Данное уравнение равносильно уравнению (схема 2):

$$\log_5(2^{3x-1}) = \log_5\left(5^{\frac{1-3x}{x}}\right).$$

Следовательно, $(3x-1)\log_5 2 = \frac{1-3x}{x}$, откуда $(3x-1)\left(\log_5 2 + \frac{1}{x}\right) = 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $3x-1=0$, откуда $x = \frac{1}{3}$;

2) $\log_5 2 + \frac{1}{x} = 0$, откуда $x = -\frac{1}{\log_5 2}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$; $-\log_5 2$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Какое уравнение называют показательным? Какое – логарифмическим?
 б) Что называют стандартным показательным уравнением? По какой схеме решают стандартные показательные уравнения? Как обосновать равносильность соответствующих переходов?
 в) Что называют стандартным логарифмическим уравнением? По какой схеме решают стандартные логарифмические уравнения? Как обосновать равносильность соответствующих переходов?

2 Решите показательные уравнения, предварительно записав их как уравнения стандартного вида.

- а) $2^x = 64$; в) $(0,2)^x = 5$; д) $3^x \cdot 4^x = 144$ ж) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$;
 б) $3^x = \frac{1}{27}$; г) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; з) $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x = 0,16$.

3 Решите показательные уравнения.

- а) $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$; в) $2^{x-1} \cdot 3^x = 0,5 \cdot 6^{2-x}$; д) $2^{3x} \cdot 3^x = 2\sqrt{6}$; ж) $2^{5x-7} = \sqrt{8} \cdot 4^x$;
 б) $\sqrt{2^x} = 16^{-\frac{3}{2}}$; г) $\sqrt{3^{3x-1}} = 9 \cdot 81^{-\frac{3}{4}}$; е) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; з) $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt[3]{9^x} = 27$.

4 Решите логарифмические уравнения, предварительно записав их как уравнения стандартного вида.

- а) $\log_5 x = 2$; в) $\log_3 x = -0,5$; д) $\log_{0,5} x = -2$; ж) $\log_{100} x = 0,25$;
 б) $\log_2 x = 1,5$; г) $\log_{\sqrt{3}} x = 4$; е) $\log_{2\sqrt{2}} x = -2$; з) $\log_{0,1} x = -2$.

5 Решите логарифмические уравнения.

- а) $\log_3(4x+13) = \log_3 5$; г) $\log_5(x^2+2x+3) = \log_5 6$;
 б) $\log_2(5x+7) = \log_2(2x-1)$; д) $\log_2(x^2-7) = \log_2(x-1)$;
 в) $\lg(4-2x) - \lg(x+5) = 0$; е) $\lg(x^2-2x) - \lg(2x+12) = 0$.

6 Решите уравнения.

- а) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$; в) $4 \cdot 3^x - 3^{x-2} = 35$;
 б) $6^x + 17 \cdot 6^{x-1} = 23$; г) $3^x \cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 2^x = 36$.

7 Решите уравнения.

- а) $\log_4 \log_2 x = 0,5$; в) $\log_2(1 + \log_3(x^2 - 1)) = 0$;
 б) $\log_2 \log_3 \log_2(x^2 + 7x) = 0$; г) $\log_3(5 + 4 \log_3(x - 1)) = 2$.

П**8** Решите уравнение.

а) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 28$;

б) $2^{2x} + 2^{2x+2} + 5^{2x-1} = 5^{2x}$;

9 Решите уравнение.

а) $\log_4 x + 3\log_2 x = 7$;

б) $\log_9 x + 2\log_3 x = 5$;

10 Решите уравнение.

а) $10^{x-2} = 30$;

б) $2^{x+1} = 3^{3-x}$;

11 Решите уравнение.

а) $(x^2 - 2x - 3) \cdot \log_2(3x - 4) = 0$;

12 Решите уравнение.

а) $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$;

б) $\log_{x+2}(3x^2 - 12) = 2$;

в) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 6^x + 6^{x+1}$;

г) $3^{2x+2} + 3^{2x+3} + 3^{2x+5} = 5^{x+1} + 5^{x+2} + 5^{x+3}$.

в) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$;

г) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

в) $5^{5-3x} = 8^x$;

г) $3^{2x+1} = 6^x$.

б) $(x^2 - 9) \cdot \log_2(x^2 + x - 11) = 0$.

в) $\log_7(x^2 + 9x + 20) - \log_7(x + 4) = 1$;

г) $\log_2(3x - 11) + \log_2(9 - x) = 3$.

М**13** Решите уравнение.

а) $2^x \cdot 3^{\frac{2}{x}} = 18$;

б) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$.

14 Решите уравнение.

а) $(x-3)\log_{\pi} x = |x-3|$;

б) $(2x+1)\ln x = |2x+1|$.

15 Сколько корней имеет уравнение:

а) $2^x + 3^x = 5$; б) $2^x + 3^x = 5^x$; в) $\log_2 x = -x - 1$?

16 Докажите, что уравнение $5 \cdot 2^{x^2} = 2 \cdot 3^x$ корней не имеет.

3.2. Показательные и логарифмические неравенства

Показательные и логарифмические неравенства будем изучать по той же схеме, что и показательные и логарифмические уравнения.

Показательным неравенством будем называть неравенство, содержащее неизвестное в показателе степени, а *логарифмическим* – неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма.

Начнём с показательных неравенств.

Неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ и $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ будем называть *показательными неравенствами стандартного вида*.

Как мы уже говорили, показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, монотонна на всей своей области определения – множестве действительных чисел.

Точнее: функция $y = a^x$ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

Отсюда имеем:

1) если $a > 1$, то $a^m > a^n$, тогда и только тогда, когда $m > n$;

2) если $0 < a < 1$, то $a^m > a^n$, тогда и только тогда, когда $m < n$.

Следовательно, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Аналогично, неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $0 < a < 1$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$.

Представим эти утверждения схематически:

Схема 1а. Если $a > 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

Схема 1б. Если $0 < a < 1$, то

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

Рассмотрим, как это работает на примерах.

Пример 1. Решите неравенство:

$$17^{7x-3} > 17^{7-3x}.$$

Решение. Неравенство стандартного вида $17^{7x-3} > 17^{7-3x}$ в данном случае равносильно линейному неравенству $7x-3 > 7-3x$ (схема 1а), откуда $x > 1$.

Схема 1а применялась здесь потому, что показательная функция $y = 17^x$ возрастает на множестве действительных чисел ($a = 17$, т.е. $a > 1$).

Ответ: $(1; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство:

$$0,5^{x+1} > 0,5^{5x-5}.$$

Решение. Показательная функция $y = 0,5^t$ убывает на множестве действительных чисел, поэтому применим схему 1б.

Неравенство стандартного вида $0,5^{x+1} > 0,5^{5x-5}$ в данном случае равносильно линейному неравенству $x+1 < 5x-5$, откуда $x > 1,5$.

Ответ: $(1,5; +\infty)$.

Сформулируем аналогичные утверждения для логарифмических неравенств.

Неравенства $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ будем называть *логарифмическими неравенствами стандартного вида*.

Как мы помним, логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ монотонна на всей своей области определения – множестве положительных действительных чисел.

Точнее: функция $y = \log_a x$ возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

Отсюда имеем:

1) если $a > 1$, то $\log_a m > \log_a n$, тогда и только тогда, когда $m > n > 0$;

2) если $0 < a < 1$, то $\log_a m < \log_a n$, тогда и только тогда, когда $n > m > 0$.

Следовательно, если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ при условии $g(x) > 0$.

Аналогично, если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ на общей области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ при условии $f(x) > 0$.

Представим это утверждение схематически:

Схема 2а. Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Схема 2б. Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > f(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 3. Решите неравенство:

$$\log_{0,2}(4x+10) > \log_{0,2} 5.$$

Решение. Логарифмическая функция $y = \log_{0,2} z$ убывает на множестве положительных чисел, поэтому (в соответствие схемой 2б) данное неравенство равносильно:

$$0 < 4x + 10 < 5.$$

Решим полученное двойное неравенство:

$$-10 < 4x < -5, \text{ откуда } -2,5 < x < -1,25.$$

Ответ: $(-2,5; -1,25)$.

Пример 4. Решите неравенство:

$$\log_2(2x^2 + 3x + 1) \leq \log_2(2x + 2)^2.$$

Решение. Неравенство стандартного вида будем решать по схеме 2а, так как соответствующая логарифмическая функция $y = \log_2 z$ возрастает на множестве положительных чисел, то есть:

$$\log_2(2x^2 + 3x + 1) \leq \log_2(2x + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 \geq (2x + 2)^2, \\ (2x + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

Условие $(2x + 2)^2 > 0$ означает, что $x \neq -1$.

Решим первое неравенство системы.

Получим:

$$2x^2 + 3x + 1 \geq (2x + 2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 \geq 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 \geq 0.$$

Решим квадратное неравенство, получим:

$$2x^2 + 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+1,5) \geq 0, \text{ откуда } x \in (-\infty; -1,5] \cup [-1; +\infty).$$

Но это еще не ответ. Необходимо учесть условие $x \neq -1$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1,5] \cup (-1; +\infty)$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Какое неравенство называют показательным? Какое – логарифмическим?
- б) Что называют стандартным показательным неравенством? По какой схеме решают стандартные показательные неравенства? Как обосновать соответствующие равносильные переходы?
- в) Что называют стандартным логарифмическим неравенством? По какой схеме решают стандартные логарифмические неравенства? Как обосновать соответствующие равносильные переходы?

2 Решите показательное неравенство, предварительно записав его как неравенство стандартного вида.

а) $2^x > 1$; в) $3^{2x-4} \leq \frac{1}{9}$; д) $2^{3-5x} \geq 32$ ж) $4^x \leq 2^{x-3}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3+x} > \frac{16}{9}$; е) $5^{5-x^2} \leq 0,2$; з) $9^{x^2} > 3^{x+3}$.

3 Решите показательное неравенство.

а) $4^{x^2} > 0,5$; в) $2 \cdot 8^{4x-1} < 0,25^{2x+3}$;

б) $0,7^{x^2-x-12} > 1$; г) $0,125^x \geq 4 \cdot 0,5^{x^2+3x}$.

4 Решите логарифмическое неравенство, предварительно записав его как неравенство стандартного вида.

а) $\log_5 x > 2$; в) $\log_3 x \geq 0,2$; д) $\lg x < -1$; ж) $\log_4 x \leq -\frac{1}{2}$;

б) $\log_{0,5} x \leq -2$; г) $\log_{\frac{2}{3}} x < -0,5$; е) $\log_{0,9} x \geq 2$; з) $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$.

5 Решите логарифмическое неравенство.

а) $\log_3(7x-8) < 0$; г) $\log_{\sqrt{2}-1}(x^2-5x+7) \geq 0$;

б) $\log_3(5-2x) < -2$; д) $\log_4(x+2)^2 \leq 1$;

в) $\log_{0,5}(4x-1) \geq -1$; е) $\log_2(x^2-3x) \leq 2$.

6 Решите неравенство.

а) $\log_4(2x-3) > \log_4(x+1)$; в) $\log_2(3x-7) \leq \log_2(2x+1)$;

б) $\log_{0,7}(4x-11) < \log_{0,7}(x+7)$; г) $\log_{\sqrt{2}-1}(x-5) \geq \log_{\sqrt{2}-1}(2x+1)$.

7 Решите неравенство.

а) $2^{x+2} + 2^{x-1} < 9$; в) $3 \cdot 5^{2x} - 7^{x+1} > 7^x - 5^{2x+1}$;

б) $4^x + 4^{x-1} \geq \frac{5}{4}$; г) $2^{x+1} + 2^{2x+1} + 2^{2x+4} \leq 2^{x-1} + 2^{x+2} + 2^{2x+3}$.

П

8 Решите неравенство.

а) $\log_3(3x+4) < \log_3(x^2+6)$; в) $\log_{0,2}(x^2-x-2) > \log_{0,2}(-x^2+2x+3)$;

б) $\log_{0,5}(x^2-x-20) > \log_{0,5}(x+4)$; г) $\lg(x^2-16) < \lg(4x-11)$.

9 Решите неравенство.

а) $0,5^{\frac{x-1}{x+2}} \leq 4$; в) $1,5^{\frac{4-3x}{x}} < 2,25$;

б) $0,4^{\frac{2x-7}{x+1}} \geq 2,5$; г) $0,25^{\frac{x}{4-x}} > 4$.

10 Решите неравенство.

а) $\log_3 |4x-1| \leq 1$; в) $\log_2 x + |\log_2 x| \geq 4$;

б) $\log_2 |2-3x| > 2$; г) $\log_3 x - |\log_3 x| < 1$.

11 Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

а) $48 \cdot 4^{x-3} \leq 3 \cdot 4^{2-x}$; в) $\log_{0,2}(2x-7) \geq \log_{0,2} 5$;

б) $0,125^{\frac{x+1}{2}} < 4$; г) $\log_3(2x+2) < \log_3(15-4x)$.

12 Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

а) $7^{x-1} + 7^{x+1} \geq 50$; в) $\log_{0,8}(x-7) \leq 2$;

б) $2^{x^2} + 2^{x^2+1} \geq 3$; г) $\log_3(3x+1) > \log_3(x-2)$.

М

13 Решите неравенство.

а) $\log_{3x+2}(x+5) < 1$; в) $\log_{x^2}(x^2+x-2) < 1$;

б) $\log_x(3x-4) \leq 2$; г) $\log_{(x-3)^2}(x-4) \geq 0$.

14 Решите неравенство.

а) $(2x-3) \cdot \log_{0,5} x < 0$; в) $(8-5x) \cdot \log_{1,1}(x+2) \geq 0$;

б) $(x^2-4) \cdot \log_4 x > 0$; г) $(x^2-3x) \cdot \log_{\frac{2}{3}}(x-1) \leq 0$.

15 Докажите, что если $a > 0$, $a \neq 1$, m , n – различные действительные числа, то $(a-1)(m-n)(a^m - a^n) > 0$

16 Докажите, что если $a > 0$, $a \neq 1$, m , n – различные положительные числа, то $(a-1)(m-n)(\log_a m - \log_a n) > 0$.

3.3. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства: метод замены неизвестной

В предыдущих двух параграфах мы научились решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства стандартного вида.

Но что делать в более сложных случаях? К сожалению, не существует методов решения, пригодных для любого показательного или логарифмического уравнения или неравенства.

Нередко показательные и логарифмические уравнения (неравенства) можно упростить методом замены неизвестных.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\log_2^2 x - 3 \log_2 x + 2 = 0.$$

Решение. Здесь всё просто: в результате подстановки (замены) $\log_2 x = a$ сразу получается квадратное уравнение $a^2 - 3a + 2 = 0$, корни которого $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Решив уравнения $\log_2 x = 1$, $\log_2 x = 2$, получим, что $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Ответ: 2 и 4.

Иногда с помощью соответствующей замены удаётся получить однородное алгебраическое уравнение.

Пример 2. Решите уравнение:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x.$$

Выполним «промежуточную» замену: $4^x = a$, $9^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$

Получим однородное уравнение относительно a и b :

$$3a^2 + 2b^2 = 5ab, \text{ откуда } 3a^2 - 5ab + 2b^2 = 0.$$

Решив его, относительно a получим: $a_1 = b$, $a_2 = \frac{2b}{3}$.

Осталось решить два показательных уравнения:

$$1) 4^x = 9^x, \text{ откуда } \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1 \text{ и } x = 0;$$

$$2) 4^x = \frac{2}{3} \cdot 9^x, \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \text{ и } x = \frac{1}{2}$$

Ответ: 0 и 0,5.

Неравенства тоже можно решать методом замены неизвестных. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x}{2 + \log_2 x} \geq 1.$$

Решение. Выполним подстановку (замену) $\log_2 x = a$:

$$\frac{a}{2+a} \geq 1, \text{ что равносильно } \frac{-2}{2+a} \geq 0.$$

Значение числителя отрицательно, а всей дроби неотрицательно. Следовательно, значение знаменателя отрицательно.

Получим: $2 + a < 0$, $a < -2$.

Осталось решить неравенство: $\log_2 x < -2$, откуда $0 < x < 0,25$.

Ответ: (0; 0,25).

Пример 4. Решите неравенство:

$$2^{1+x} - 2^{1-x} \geq 3.$$

Решение. Выполним замену: $2^x = a$, тогда $2^{-x} = \frac{1}{a}$, причём $a > 0$.

Получим неравенство:

$$2a - \frac{2}{a} \geq 3, \text{ откуда } 2a^2 - 3a - 2 \geq 0 \text{ и } 2(a+0,5)(a-2) \geq 0.$$

Поскольку $a > 0$, то тем более $a+0,5 > 0$, а следовательно, из неравенства $2(a+0,5)(a-2) \geq 0$ заключаем, что $a \geq 2$.

Осталось решить неравенство $2^x \geq 2$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Не всегда бывает понятно сразу, какую именно замену неизвестных следует использовать.

Пример 5. Решите неравенство:

$$\log_3(3^x - 8) > 2 - x.$$

Решение. Сначала попытаемся свести неравенство к неравенству стандартного вида. Из определения логарифма следует, что $2 - x = \log_3 3^{2-x}$.

Получили неравенство стандартного вида:

$$\log_3(3^x - 8) > \log_3 3^{2-x}.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 3^x - 8 > 3^{2-x}, \\ 3^{2-x} > 0 \end{cases}$$

Условие $3^{2-x} > 0$ можно не проверять — одно выполняется при любых действительных значениях x , осталось решить неравенство $3^x - 8 > 3^{2-x}$.

Выполним подстановку $3^x = a$, где $a > 0$.

Получим дробное рациональное неравенство:

$$a - 8 > \frac{9}{a}.$$

Умножим обе части неравенства на $a > 0$ и получим квадратное неравенство, равносильное исходному неравенству:

$$a^2 - 8a - 9 > 0, \text{ откуда } (a+1)(a-9) > 0.$$

Можно, конечно, решить полученное неравенство методом интервалов или с помощью графика, но есть способ лучше.

Здесь вновь удобно воспользоваться тем, что a положительно.

Действительно, $a > 0$, следовательно, $a+1 > 0$, и при этом условии неравенство $(a+1)(a-9) > 0$ равносильно неравенству $a-9 > 0$, откуда $a > 9$.

Осталось решить неравенство $3^x > 9$, то есть $3^x > 3^2$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

С помощью замены неизвестных иногда удаётся решать и более сложные типы уравнений или неравенств.

Пример 6. Решите уравнение: $x^{\log_2 x - 1} = 4$.

Решение. В данном уравнении неизвестное содержится и в основании, и показателе степени.

Сначала прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2.

$$\log_2 x^{\log_2 x - 1} = \log_2 4, \text{ откуда } (\log_2 x - 1) \cdot \log_2 x = 2.$$

Выполним подстановку: $\log_2 x = a$.

Получим: $(a-1) \cdot a = 2$, откуда $a^2 - a - 2 = 0$ и $a_1 = -1$, $a_2 = 2$.

Осталось решить уравнения $\log_2 x = -1$, $\log_2 x = 2$.

Ответ: 0,5 и 4.

В заключение ещё раз повторим, что не существует общих рекомендаций, пригодных для любой задачи. Умение находить подходящую подстановку приходит с опытом.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как решают уравнения и неравенства методом замены неизвестного?
- б) Какие выражения принято называть однородными? Как использовать свойство однородности при решении уравнений и неравенств методом замены неизвестного?

2 Решите уравнение методом замены неизвестного.

- а) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$;
- в) $2 \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 1 = 0$;
- б) $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 = 0$;
- г) $\log_2^2 x + 3 \log_{0,5} x + 2 = 0$.

3 Решите неравенство методом замены неизвестного.

- а) $5^{2x+1} > 5^x + 4$;
- в) $\log_3^2 x + 6 < \log_3 x^5$;
- б) $4^x \leq 2^{x+1} + 3$;
- г) $6 \log_4 x \geq \log_2^2 x + 2$.

4 Решите уравнение.

- а) $\frac{1}{5^{x-1} - 1} = \frac{2}{5^{x-1} + 3}$;
- в) $\frac{3 \lg x + 2}{1 - \lg^2 x} = \frac{1}{1 - \lg x}$;
- б) $\frac{6}{3^x} - \frac{4}{3^x + 1} = 1$;
- г) $\frac{2}{2 + \log_3 x} + \frac{1}{4 - \log_3 x} = 1$.

5 Решите неравенство.

а) $2^x - \frac{1}{2^x} > \frac{15}{4}$;

в) $\frac{1}{2 - \log_2 x} \geq \log_2 x - 4$;

б) $\frac{1}{2^x + 5} < \frac{1}{2^{x+3} - 2}$;

г) $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2$.

6 Решите уравнение.

а) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$;

в) $\log_2 x + \log_x 2 = 2,5$;

б) $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$;

г) $\log_2(x+1) = \log_{x+1} 16$.

7 Решите неравенство.

а) $\log_3(3^x - 8) > 2 - x$;

в) $\log_2 x + \log_x 2 < 2,5$;

б) $\log_2(2^x - 7) < 3 - x$;

г) $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.

II

8 Решите уравнение.

а) $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$;

б) $\lg^2(x+1) = \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2 \lg^2(x-1)$.

9 Решите уравнение.

а) $4^{2x+1} - 2^{3x+6} = 4 \cdot 8^{x+1}$;

в) $2 \log_2^2 x = \log_2 x^2$;

б) $2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^x$;

г) $\log_4^4 x - 5 \log_4^2 x + 4 = 0$.

10 Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства (если они существуют).

а) $4^{x+3} + 2 \leq 3 \cdot 2^{x+3}$;

б) $2^{2x} - 2^{x+1} \leq 18$.

11 Решите уравнение.

а) $x^{\lg 2x} = 5$; б) $x^{\lg x} = 5 \cdot 2^{\lg x^2 - 1}$.

M

12 Решите неравенство.

а) $2 \cdot 4^x \geq 6^x + 3 \cdot 9^x$;

б) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x < 5 \cdot 36^x$.

13 Решите уравнение.

а) $18^x + 36 = 9^{x+1} + 2^{x+2}$;

б) $\log_2(x^2 - 4x + 3) - \log_2(x-1) \log_2(x-3) = 1$.

14 Решите уравнение.

а) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6$;

б) $5^{\lg x} + x^{\lg 5} = 50$.

15 Решите уравнение.

а) $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27 \cdot 5^{-x} + 7 \cdot 5^{-3x} = 0$;

б) $27^x - 13 \cdot 9^x + 39 \cdot 3^x + 27 = 0$.

16 Решите уравнение: $|1 - \log_2 x| + 2 = |3 - \log_2 x|$.

17) Решите неравенство: $\left| 3 - \log_{0,2} x \right| > \left| 1 + \log_{0,2} x \right|$.

18) Решите уравнение.

а) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$;

б) $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4^x$.

3.4. О преобразованиях логарифмических уравнений и неравенств

При решении более сложных логарифмических уравнений и неравенств используют стандартные формулы – свойства логарифмической функции.

Важнейшие из них следующие:

1. $\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$

2. $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

3. $\log_c a^n = n \log_c a$

4. $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

Следует помнить, что левые и правые части стандартных логарифмических формул могут иметь разные области определения.

Это может привести к неравносильным преобразованиям.

Так, например, левая часть формулы 1 определена при условии $ab > 0$, что возможно, в том числе, и при отрицательных значениях a и b , а правая часть – только при положительных значениях a и b .

Поэтому при преобразованиях логарифма произведения в сумму логарифмов по этой формуле область определения исходного выражения может сузиться, что возможно в дальнейшем приведёт к потере решений.

В случае не равносильных преобразований уравнений желательно не допускать потери корней, чтобы потом было можно выполнить проверку полученных корней подстановкой в уравнение.

В разобранный ниже примере при первом же преобразовании общая область определения функций, входящих в уравнение изменилась, так как функции, входящие в первое уравнение, определены при $x > -1$, а функции, входящие во второе уравнение – при $x > -1$ и $x < -3$. Область определения исходного уравнения (ОДЗ) расширилась, следовательно, могли появиться посторонние корни.

Поэтому необходимо выполнить проверку или дополнить полученное уравнение условием равносильности, а затем решить полученную смешанную систему.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$$

Решение. Уравнение можно переписать в виде:

$$\log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3.$$

Корни: $x_1 = 0$, $x_2 = -4$,

Проверка:

1) $x = 0$; после подстановки в уравнение получаем верное равенство:

$$\log_3(0+1) + \log_3(0+3) = 1.$$

2) $x = -4$; после подстановки в уравнение получаем равенство, не имеющее смысла:

$$\log_3(-4+1) + \log_3(-4+3) = 1.$$

Логарифмы, входящие в левую часть равенства, не определены.

Ответ: 0.

Решение, в котором учитываются условия равносильности, может выглядеть следующим образом:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1)(x+3) = \log_3 3, \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+3) = 3, \\ x > -1 \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = -4$, второй из них – посторонний, поскольку не удовлетворяет условию $x > -1$.

Ответ: 0

Схема равносильных преобразований уравнений (неравенств) по формулам 1–3 может выглядеть следующим образом.

Схема 1. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\begin{aligned} 1) \log_a f(x) + \log_a g(x) &= p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a (f(x) \cdot g(x)) = p(x), \\ f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \end{cases} \\ 2) \log_a f(x) - \log_a g(x) &= p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \frac{f(x)}{g(x)} = p(x), \\ f(x) > 0, \quad g(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Примечание. Вместо знака равенства, в схеме 1 может стоять один из знаков неравенства.

В случае преобразований неравенств желательно не допускать неравносильных преобразований, даже не приводящих к потере решений, так проверка решений методом подстановки в неравенство, как правило, невозможна.

Пример 2. Решите неравенство:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) > \log_3 2.$$

Решение. Поскольку проверка невозможна, постараемся, чтобы все преобразования данного неравенства были равносильны.

Перепишем неравенство в виде:

$$\begin{aligned}\log_3(x+1) &> \log_3(x-1) + \log_3 2, \\ \log_3(x+1) &> \log_3 2(x-1).\end{aligned}$$

Получили равносильное неравенство стандартного вида – область определения функций, входящих в уравнение не изменилась.

Запишем кратко:

$$\log_3(x+1) > \log_3(2x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 2x-2, \\ 2x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x > 1 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 3)$.

При преобразованиях по формулам 1–3, выполненным «слева–направо», общая область определения функций, входящих в уравнение может сузиться, что таит в себе опасность потери решений.

Пример 3. Решите неравенство:

$$\log_2(x+1)^2 + \log_2(2-x)^2 > 2.$$

Решение. Область определения функций, входящих в неравенство (ОДЗ): $x \neq -1$, $x \neq 2$. Необходимо, чтобы при проведении преобразований ОДЗ не менялось:

$$\log_2(x+1)^2 + \log_2(2-x)^2 > 2 \Leftrightarrow \log_2|x+1| + \log_2|2-x| > 2,$$

Преобразуем по формуле 1, получив равносильное неравенство:

$$\log_2(|x+1| \cdot |2-x|) > \log_2 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - x - 2| > 4, \\ x \neq -1, \quad x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - x - 2)^2 > 4^2, \\ x \neq -1, \quad x \neq 2 \end{cases}.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов, решим первое неравенство методом интервалов, предварительно разделив его на выражение $(x^2 - x + 2)$, положительное при всех значениях x :

$$(x^2 - x - 6)(x^2 - x + 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) > 0.$$

Решение последнего неравенства имеет вид: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Учёт условий $x \neq -1$, $x \neq 2$ никак не влияет на него.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

Схема 2. Если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$\begin{aligned} 1) \log_a f(x) \cdot g(x) = p(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)| = p(x), \\ f(x) \cdot g(x) > 0 \end{cases} \\ 2) \log_a \frac{f(x)}{g(x)} = p(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)| = p(x), \\ f(x) \cdot g(x) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Примечание. Вместо знака равенства, в схеме 1 может стоять один из знаков неравенства.

Потеря корней в уравнении может получиться в результате применения формулы перехода к новому основанию, когда основания логарифмов содержит неизвестное.

В следующем примере уравнение, полученное в результате перехода к новому основанию, не равносильно исходному уравнению: потерял корень 1. Правильное решение предполагает исследование случая, когда основание нового логарифма равно 1.

Пример 4. Решите уравнение:

$$\log_{2x} x + \log_{4x} x = 0.$$

Решение. Если хочется перейти к логарифмам по основанию x , то следует учесть, что этого нельзя делать при $x = 1$.

Рассмотрим два случая:

1) $x = 1$. Проверим, является ли $x = 1$ корнем данного уравнения. Равенство $\log_2 1 + \log_4 1 = 0$ верно, значит, является.

2) $x \neq 1$. Получим уравнение: $\frac{1}{\log_x 2 + 1} + \frac{1}{1 + 2 \log_x 2} = 0$.

Имеем: $3 \log_x 2 + 2 = 0$, откуда $\log_x 2 = -\frac{2}{3}$, $x^{-\frac{2}{3}} = 2$, $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: 1 и $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Замечание. Всех этих проблем можно было бы в значительной степени избежать, если перейти к логарифмам по основанию 2.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Какие преобразования логарифмических уравнений и неравенств могут привести к потере решений?

б) Какие преобразования логарифмических уравнений и неравенств могут привести к приобретению посторонних решений?

2 Равносильны ли уравнения

а) $\log_3(x-2)^2 = 2$ и $2\log_3(x-2) = 2$;

б) $\lg x + \lg(x-3) = 1$ и $\lg x(x-3) = \lg 10$?

3 Равносильны ли неравенства?

а) $\log_3(x-2) + \log_3 x > 2$ и $(x-2)x > 9$;

б) $\log_3(x-2) + \log_3 x < 2$ и $(x-2)x < 9$.

4 Решите уравнение.

а) $\log_6(3-x) + \log_6(4-x) = \log_6 12$;

в) $\lg x + \lg(x+3) = 1$;

б) $\log_{0,5}(x-1) + \log_{0,5}(x-2) = \log_{0,5} 6$;

г) $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$.

5 Решите неравенство.

а) $\log_2(x-1) + \log_2 x \leq 1$;

в) $\log_{0,5}(2x-7) \leq \log_{0,5}(10-x) + 1$;

б) $\log_3 x + \log_3(x-8) > 2$;

г) $2\log_2(x-1) > \log_2(5-x) + 1$.

6 Решите уравнение.

а) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)} = 1$;

в) $\log_3(x^2-6) - \log_3(x-2) = 1$;

б) $\frac{\log_5(-2x)}{\log_5(x+1)} = 2$;

г) $\lg(3x^2+7) - \lg(3x-2) = 1$.

7 Решите неравенство.

а) $\log_{4x} 8 < 2$;

в) $\log_{x+3} 16 > 2$;

б) $\log_{2x-3} x \geq 1$;

г) $\log_{3x-2} x < 1$.

П

8 Решите уравнение.

а) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;

в) $\log_x 9 + \log_{3x} 3 + \log_{9x} 27 = 0$;

б) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$;

г) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

9 Решите уравнение.

а) $\log_3(2^x - 1) + \log_3(2^x - 3) = 1$;

б) $\log_2(3^x - 1) + \log_2(3^x - 2) = 1$;

в) $\log_3(2^x + 3) + \log_3(5 - 2^x) = 4$;

г) $\log_2(24 - 2^x) + \log_2(8 + 2^x) = 8$.

10 Решите уравнение.

а) $\lg(2x - 19) + \lg x = \lg(3x - 20)$;

б) $\log_2(2 - x) - \log_2(2 + x) = \log_2 x - 1$;

в) $\log_7(x - 2) + \log_7(2x - 7) = 1 + \log_7(x + 2)$;

г) $\log_3(x - 3) + \log_3(x + 5) = 2 \log_3(2x - 5)$.

11 Решите неравенство.

а) $\lg(x - 1) + \lg(x - 2) < \lg(x + 2)$;

б) $\lg(x + 2) + \lg(x - 2) > \lg(4x + 1)$;

в) $\log_3 x + \log_3(x + 1) < 2 \log_3(2x + 6)$;

г) $\log_5 x + \log_5(x - 3) \leq \log_5(2x - 5) + \log_5 2$.

12 Решите неравенство.

а) $\log_{x^2}(2 + x) < 1$;

б) $\log_x(6x - 1) > \log_x(2x)$;

в) $\log_x \frac{3x + 5}{x - 3} < 0$;

г) $\log_x \frac{4x + 5}{6 - 5x} \geq -1$.

М

13 Решите неравенство.

а) $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) > 0$;

б) $\log_{x-3}(x^2 - 4x + 3) < 0$.

14 Решите уравнение, предварительно исследовав область значений, входящих в него функций.

а) $1 - (x - 1)^2 = \log_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$;

б) $\log_{x-1} x = \log_x(x + 1)$.

15 Решите неравенство, предварительно исследовав область определения, входящих в него функций.

$$\left(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + 1\right) \log_3 \frac{2x}{5} + \frac{1}{x} \sqrt{10x - 2x^2 - 12} \leq 0.$$

16 Решите неравенство: $\frac{6}{2x+1} > \frac{1 + \log_2(2+x)}{x}$.

3.5. Примеры решения систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств

При решении систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств используют обычные приёмы решения систем уравнений.

При этом показательные и логарифмические уравнения и неравенства с несколькими неизвестными, входящие в системы, преобразуют теми же приёмами, что и соответственные уравнения и неравенства с одним неизвестным.

Иногда с помощью простых преобразований удаётся превратить показательно-логарифмическую систему в алгебраическую.

В этом случае достаточно проследить, чтобы преобразования каждого из уравнений были равносильны.

Пример 1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_4 x = \log_2 y, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \log_2 x = 2 \log_2 y, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \log_2 y^2, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2, \\ x^2 - 5x + 4 = 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

В левой части уравнения при переходе $2 \log_2 y = \log_2 y^2$ область определения расширилась, и чтобы сохранить равносильность, необходимо добавить к системе условие $y > 0$.

Корни квадратного уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ находим легко: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Осталось решить уравнения $y^2 = 1$ и $y^2 = 4$.

Ответ: $(1; 1)$, $(1; -1)$, $(4; 2)$, $(4; -2)$.

Если одно из уравнений системы линейное, естественно выразить одно из неизвестных через другое и решать полученное уравнение с одним неизвестным.

Следующую систему можно решать таким способом, но замена неизвестных эффективнее.

Пример 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x + 2^x = 12, \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 2^x + 2^x = 12, \\ 2^{x+y} = 32 \end{cases}$$

Выполним подстановку $2^x = a$, $2^y = b$, где $a > 0$, $b > 0$.

Получим симметрическую систему:

$$\begin{cases} a + b = 12, \\ ab = 32 \end{cases}$$

Решив систему, например, методом подстановки, получим: $a_1 = 4$, $b_1 = 8$ и $a_2 = 8$, $b_1 = 4$. Осталось решить системы:

$$\begin{cases} 2^x = 4, \\ 2^y = 8 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2^x = 8, \\ 2^y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3), (3; 2)$.

Пример 3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

Решение. Перемножим уравнения системы, получим уравнение-следствие исходной системы: $6^{x+y} = 6^3$, что равносильно $x + y = 3$.

Разделим первое уравнение системы на второе, получим еще одно уравнение-следствие исходной системы

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3}, \text{ что равносильно } x - y = 1.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Поскольку мы не утверждаем, что последняя система равносильна исходной, необходимо сделать проверку.

Рассмотрим ещё одно решение.

Прологарифмируем обе части каждого из уравнений по основанию 10.

Получим равносильную линейную систему. Решим её методом алгебраического сложения.

$$\begin{cases} \lg 2 \cdot x + \lg 3 \cdot y = \lg 12, \\ \lg 3 \cdot x + \lg 2 \cdot y = \lg 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 2 \cdot x + \lg 3 \cdot y = 2 \lg 2 + \lg 3, \\ \lg 3 \cdot x + \lg 2 \cdot y = 2 \lg 3 - \lg 2 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\lg 3$, а второе на $\lg 2$, после чего вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$y \cdot (\lg^2 3 - \lg^2 2) = (2 \lg 2 \lg 3 + \lg^2 3) + (2 \lg 2 \lg 3 - \lg^2 2) = \lg^2 3 - \lg^2 2.$$

Следовательно, $y = 1$, откуда $x = 2$.

Ответ: $(2; 1)$.

Второе решение несколько более громоздко, но зато все переходы равносильны. Какое решение лучше? Каждый выбирает то, которое больше нравится ему.

В следующей системе главное – следить за равносильностью проводимых преобразований.

Пример 4. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2(xy) - \frac{1}{2} \log_2 x^2 = 1, \\ \log_{x^2} y^2 + \log_2(y+6) = 4. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде:

$$2 \log_2(xy) - \log_2 x^2 = 2$$

Преобразуем левую часть уравнения (при условии $xy > 0$):

$$2 \log_2(xy) - \log_2 x^2 = \log_2(x^2 y^2) - \log_2 x^2 = \log_2 x^2 + \log_2 y^2 - \log_2 x^2 = \log_2 y^2.$$

Таким образом, первое уравнение системы равносильно:

$$\log_2 y^2 = 2, \quad y^2 = 4.$$

Рассмотрим два случая:

1) $y = 2$.

$$\begin{cases} \log_{x^2} 4 + \log_2 8 = 4, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x^2} 4 = 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

2) $y = -2$

$$\begin{cases} \log_{x^2} 4 + \log_2 4 = 4, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x^2} 4 = 2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 4, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}.$$

Ответ: $(2; 2), (-\sqrt{2}; -2)$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Какие способы решения систем уравнений Вы знаете?

б) Как применяется способ замены неизвестных при решении систем показательных и логарифмических уравнений?

2 Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} \log_5(x+y) = 1, \\ \log_3(x-y) = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \log_3(x+2y) = 2, \\ \log_3(x-2y) = 1 \end{cases}$	в) $\begin{cases} 9^{x+y} = 81, \\ 3^{x-y+1} = 1 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{x-y} = 128, \\ 0,5^{x-2y} = 0,25 \end{cases}$
---	--

3 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 2^x + 2^y = 13, \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 35 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 5, \\ \log_3 x - \log_2 y = 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5^{2x} - 3^{2y} = 9, \\ 5^x + 3^y = 9 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \log_2^2 x + \log_2^2 y = 5, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

4 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \log_2 x + \log_3 y = 1, \\ \log_2 x \cdot \log_3 y = -6 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3^x + 3^y = 30, \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \log_2 x \cdot \log_2 y = 2, \\ xy = 8 \end{cases}$$

5 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2, \\ \log_2 y + \log_2 (x-2) = \log_2 12 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 25, \\ \log_2 y + \log_2 (x-8) = \log_2 27 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2, \\ \log_2(2x+y) - \log_2(2x-y) = 1 \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg(x+y), \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

6 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 8^x = 20y, \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3^y = 4x, \\ 2^y = 9x. \end{cases}$$

II

7 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} x^y = y^x, \\ x^x = y^{9y} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^{x-y} = y^2, \\ y^{x-y} = x^6 y^4 \end{cases}$$

8 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45 \end{cases}$$

9 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 = 6 + y, \\ \log_x y + \log_y x = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 0,75, \\ \log_x y - \log_y x = 1,5 \end{cases}$$

10 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} \log_2(x \cdot y) = 2, \\ \log_2 x^2 - \log_2 y^2 = 4 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 1,5, \\ \log_x 3 + \log_y 9 = 3 \end{cases}$$

11 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} x + 3^y = 2 \\ x^3 + 27^y = 26 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x + y = 13, \\ 2^{2x+1} + 3y = 35 \end{cases}$$

12 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \lg 3 \cdot \lg(3x) = \lg 2 \cdot (\lg 2y), \\ \lg 2 \cdot \lg x = \lg 3 \cdot \lg y. \end{cases}$$

М

13 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} 3^{x-y} + 3^{2x} \cdot 3^{-2y} = 12, \\ 3^{2x} + 3^{-2y} = 10 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y = 9^y, \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8. \end{cases}$$

14 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2, \\ \log_3(x^2 + y^5) + \log_9(y^5 + z^7) + \log_9 z = \log_3 4, \\ \log_4 x + \log_{16} y + \log_{16} z = 1 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} z^x = x, \\ z^y = y, \\ y^y = x. \end{cases}$$

15 Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} x + 2^x = y + 2^y, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

3.6. Иррациональные уравнения: стандартные приёмы решения

Иррациональным уравнением будем называть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала или в дробной степени.

Примеры иррациональных уравнений:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5} = 4, \quad x^{\frac{3}{2}} + x = 2, \quad \sqrt{\frac{x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 2\frac{1}{2}.$$

Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, $\sqrt{f(x)} = g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – рациональные выражения будем называть иррациональным уравнением *стандартного вида*.

Иррациональные уравнения решают так же, как рациональные: с помощью тождественных преобразований пытаются свести уравнение к уравнению стандартного вида, – такому уравнению, которое мы уже умеем решать, преобразуя его к целому рациональному уравнению.

Будем решать стандартные иррациональные уравнения, основываясь на монотонности функции $y = \sqrt{x}$. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на области определения, следовательно, каждое своё значение она принимает ровно один раз.

Поэтому условие $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ может выполняться, только если $a = b$ и числа a , b принадлежат области определения функции $y = \sqrt{x}$.

Следовательно, уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при условии $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$.

Схема 1.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Из двух условий $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ можно оставить одно, поскольку в системе присутствует условие $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2x - 1} = \sqrt{1 - x}.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 1 - x, \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Корни уравнения: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Из них второй корень – посторонний, так как не удовлетворяет условию $x \leq 1$.

Ответ: -1 .

Исследуем уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Заметим, что $\sqrt{f(x)} \geq 0$, следовательно, $g(x) \geq 0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g^2(x)}$, рассуждая как в предыдущем случае, получаем, что полученное уравнение равносильно $f(x) = g^2(x)$, при условии $g(x) \geq 0$.

Заметим, что условие $f(x) \geq 0$ не требуется, так как $f(x) = g^2(x) \geq 0$.

Схема 2.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$.

Решение. Воспользуемся схемой 2.

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 1 = (2x - 1)^2, \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9x = 0, \\ x \geq 0,5 \end{cases}$$

Корни уравнения $3x^2 - 9x = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, из них первый корень не удовлетворяет условию $x \geq 0,5$.

Ответ: 3.

Заметим, что решая стандартные иррациональные уравнения в соответствии со схемами 1 и 2, мы всяких раз переходили от уравнения вида $a(x) = b(x)$ к уравнению $a^2(x) = b^2(x)$. В этом случае принято говорить, что мы «возводим обе части уравнения в квадрат». Способ возведения в квадрат является основным при решении иррациональных уравнений с квадратичными радикалами. Об этом мы поговорим подробнее в следующих параграфах.

При решении уравнений с кубическими радикалами, и с радикалами больших степеней схемы решения стандартных уравнений аналогичны (с учётом области определения соответствующих функций).

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Какое уравнение называют иррациональным?

б) На чём основан метод решения стандартных иррациональных уравнений?

2 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-2}$;

в) $\sqrt{x^2-x-4} = \sqrt{x-1}$;

б) $\sqrt{x+1} = \sqrt{6+4x}$;

г) $\sqrt{6-x^2} = \sqrt{12-x}$.

3 Докажите, что иррациональное уравнение не имеет корней.

а) $\sqrt{3+x^2} = -1$;

в) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 0$;

б) $\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 4$;

г) $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = 1$.

4 Решите уравнение.

а) $\sqrt{4-x} = 7$;

в) $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x+8} = 4$;

б) $\sqrt[3]{x-16} = -1$;

г) $\sqrt{(x+2)(x+8)} = 4$.

5 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x+14} = x+2$;

в) $\sqrt{12-x} = x$;

б) $\sqrt{7-x} = 1-x$;

г) $\sqrt{6-2x} = x+1$.

6 Решите уравнение.

а) $\sqrt{26-x^2} = x-4$;

в) $\sqrt{2x^2-3x-1} = x-1$;

б) $\sqrt{x^2+8} = 2x+1$;

г) $\sqrt{5-4x-x^2} = 1-x$.

7 Решите уравнение.

а) $\sqrt[3]{16-x^3} = 4-x$;

в) $\sqrt[3]{x^3-7x+1} = x+1$;

б) $\sqrt[3]{x^3+8} = x+2$;

г) $\sqrt[3]{x^2-x-1} = x-1$.

II

8 Решите уравнение.

а) $(x^2-1)\sqrt{x-2} = 0$;

в) $\sqrt{x-1}\sqrt{3-x^2} = 0$;

б) $(9-x^2)\sqrt{1-2x} = 0$;

г) $\sqrt{x+4}\sqrt{x-2} = 0$.

9 Решите уравнение.

а) $\sqrt{4x-1} = 2x-1$;

в) $\sqrt{x-1} = 6-x$;

б) $3\sqrt{5-x} = 7-x$;

г) $4\sqrt{6+x} = 1+x$.

10 Решите уравнение.

а) $\sqrt{6x-x^2-5} = 2x-6$;

б) $\sqrt{x^2-x-1} = \sqrt{2x^2-2}$.

11 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x^4-2x-5} = 1-x$;

б) $\sqrt{x^2+x-6} + 2\sqrt{x} = \sqrt{2-x} + 2$.

М**12** Решите уравнение.

а) $\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{18 + 2x}} = 1$;

б) $\sqrt{(1-x)(x+2)} = (x+5)\sqrt{x-1}$.

13 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x$;

б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1 + x$.

14 Решите уравнение.

а) $x\sqrt{3 + 2x - x^2} = x^2 + 1$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 10} = \frac{3}{x}$.

3.7. Примеры решения иррациональных уравнений: возведение в степень и замена переменных

Наиболее часто используемый приём решения иррациональных уравнений с квадратичными радикалами – возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Суть его состоит в следующем: выбирают один из радикалов, оставляют его в одной из частей уравнения, остальные слагаемые переносят в другую часть. Затем обе части полученного уравнения возводят в квадрат. Повторяют этот приём до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

Важно отметить, что уравнение $f(x) = g(x)$, вообще говоря, не равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$. Действительно, уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ равносильно уравнению $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0$, а следовательно корнями уравнения $f^2(x) = g^2(x)$ будут не только корни уравнения $f(x) = g(x)$, но и корни уравнения $f(x) = -g(x)$ (если они существуют). Поэтому при возведении в квадрат необходимо тем или иным способом проверять получившиеся корни.

Например, подставить найденные корни в исходное уравнение или воспользоваться условиями, разобранными в предыдущем параграфе.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\sqrt{3x-2} = 4 - \sqrt{x+2}.$$

Возведём обе части уравнения в квадрат и упростим полученное уравнение:

$$3x - 2 = 16 - 8\sqrt{x+2} + x + 2, \quad 4\sqrt{x+2} = 10 - x.$$

Возведём в квадрат ещё раз:

$$16(x+2) = (10-x)^2, \quad x^2 - 36x + 68 = 0.$$

Корни квадратного уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 34$.

Выполним проверку подстановкой в уравнение:

1) $x_1 = 2$, $\sqrt{2+2} + \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 4$ – верно.

2) $x_2 = 34$, $\sqrt{2+34} + \sqrt{3 \cdot 34 - 2} > 4$, $x_2 = 34$ – посторонний корень.

Ответ: 2.

Другой распространенный приём – замена неизвестных.

Пример 2. Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2} = 8-x.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{x-2}$, тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} t = 6 - t^2, \\ t \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 6 = 0, \\ t \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Следовательно, $\sqrt{x-2} = 2$, откуда $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример 3. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt{x-1} = b$, где $b \geq 0$.

Уравнение сводится к системе, которую решим методом подстановки:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^3 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + (1-a)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + a^2 - 2a = 0 \end{cases}$$

Получим: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -2$. Здесь очень важно найти соответственные значения неизвестной b , чтобы проверить ограничение $b \geq 0$. Имеем: $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 3$. Для всех значений b ограничение выполняется.

Решив уравнения $\sqrt[3]{2-x} = 0$, $\sqrt[3]{2-x} = 1$, $\sqrt[3]{2-x} = 2$ получим ответ.

Ответ: 1, 2 и 10.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Какое уравнение называют иррациональным?

б) На чём основан метод решения стандартных иррациональных уравнений?

2 Докажите, что данные иррациональные уравнения не имеют корней.

а) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} = 6$;

в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x^2} = x+7$;

б) $\sqrt{2x} + \sqrt{4x-5} = -2$;

г) $\sqrt{x-2} + x^2 = 4-x^4$.

3 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x+21} = 8$;

в) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+3} = 1$;

б) $\sqrt{2x+15} - \sqrt{x-1} = 3$;

г) $\sqrt{4x+8} + \sqrt{3x-2} = 2$.

4 Решите уравнение.

а) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$;

в) $3\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$;

б) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 6$;

г) $\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{x+5} = 12$.

5 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x+5} - \sqrt{5-x} = \sqrt{x-1}$;

в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-11}$;

б) $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{x-1}$;

г) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$.

П

6 Решите уравнение.

а) $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$;

в) $\sqrt{\frac{3-x}{x+2}} + 3\sqrt{\frac{x+2}{3-x}} = 4$;

б) $\sqrt{10-2x} = \frac{8}{\sqrt{10-2x}} - 2$;

г) $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$.

7 Решите уравнение.

а) $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$;

в) $2x^2 + 3x + 3 = 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9}$;

б) $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$;

г) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5$.

8 Решите уравнение.

а) $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$;

б) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$;

в) $\sqrt{\frac{20+x}{x}} + \sqrt{\frac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$;

г) $\sqrt{\frac{2x+1}{x}} + \sqrt{\frac{x-3}{x}} = 2$.

М

9 Решите уравнение.

а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$; б) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

10 Решите уравнение.

а) $4x^2 + 5x\sqrt{x+5} = 44(x+5)$;

б) $\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x} = \sqrt{(x+1)^3}$.

11 Решите уравнение.

а) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4-2x-x^2$;

б) $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$.

ГЛАВА IV

Комбинаторика и вероятность

4.1. Метод математической индукции

В математике достаточно распространенным является метод доказательства верности некоторого утверждения для всех натуральных чисел, называемый *методом математической индукции*.

Например, мы можем рассмотреть последовательность сумм натуральных чисел, начиная с единицы и заканчивая данным числом:

$$\begin{aligned}1 &= 1, \\1 + 2 &= 3, \\1 + 2 + 3 &= 6, \\1 + 2 + 3 + 4 &= 10, \\1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15, \\1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 &= 21, \\&\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Обозначив эту сумму через $s(n)$, где n – натуральное число, обозначающее количество первых натуральных чисел, которые необходимо просуммировать, мы можем записать, что:

$$s(1)=1, s(2)=3, s(3)=6, s(4)=10, s(5)=15, s(6)=21 \text{ и т. д.}$$

Однако, нам может потребоваться зависимость $s(n)$ в явном виде, записанном конкретной формулой. Скажем, гораздо проще будет вычислить значение $s(1000)$ по этой формуле, чем непосредственно суммировать первых 1000 натуральных чисел.

Немного подумав, можно догадаться, что при рассмотренных выше значений n эта зависимость имеет вид $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Однако, мы не можем быть уверены в том, что эта формула верна для произвольного натурального числа n . Пока что мы можем утверждать только, что по ней можно верно вычислить значения $s(n)$ как минимум при натуральных числах, не больших 6.

Мы можем вычислить по этой формуле значения $s(n)$ для $n > 6$ и сравнить их с теми значениями, что получаем явно:

$s(7) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$	$s(7) = \frac{7 \cdot (7+1)}{2} = 28$
$s(8) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$	$s(8) = \frac{8 \cdot (8+1)}{2} = 36$
$s(9) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$	$s(9) = \frac{9 \cdot (9+1)}{2} = 45$
$s(9) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$	$s(10) = \frac{10 \cdot (10+1)}{2} = 55$

Мы видим, что значения, вычисленные по формуле, совпадают с теми, что вычислены непосредственно. Это увеличивает нашу уверенность в справедливости формулы, однако, невозможно утверждать на основе любого количества такого рода частных подтверждений нашей догадки, что эта формула работает всегда корректно. Мы могли бы взять 1000 первых частных случаев, 1000000 или еще больше, но это не означало бы, что, скажем, при $n = 1000000000$ формула будет также давать правильный результат.

Для того чтобы доказать, что наша формула верна при всех n , можно применить метод математической индукции, который устроен следующим образом (строгую формулировку этого принципа мы дадим немного позже):

- 1) доказывается, что формула верна при $n = 1$;
- 2) доказывается, что из предположения о том, что формула верна для некоторого произвольного числа n , вытекает, что она верна и для следующего числа $n + 1$.

Из этих двух пунктов следует, что если формула работает при $n = 1$ и доказано, согласно второму пункту, что формула работает для следующего натурального числа, то, следовательно, формула верна при $n = 2$, аналогично рассуждая, получим, что формула верна при $n = 3$, $n = 4$ и т. д. Т.к. последовательно перебирая натуральные числа, мы можем добраться до любого, сколь угодно большого натурального числа и для следующего за ним (согласно второму пункту) формула также будет верна, мы получаем, что формула верна для любых натуральных чисел.

Теперь, кратко описав принцип математической индукции, применим его к нашей задаче. Рассмотрим каждый из пунктов:

- 1) при $n = 1$ мы имеем $s(n) = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$, что совпадает с тем, что мы получаем непосредственно, т. е. $s(1)$ истинно;

- 2) предположим, что при некотором n формула $s(n)$ верна. Попробуем вычислить $s(n+1)$:

$$s(n+1) = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n}_{s(n)} + (n+1) = s(n) + (n+1).$$

Так как $s(n)$ верно, то:

$$\begin{aligned} s(n+1) &= s(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

То, что мы получили, есть не что иное, как значение $s(n+1)$, вычисленное согласно нашей формуле.

Таким образом, оба пункта выполнены, и мы доказали, что $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Теперь можно легко вычислить сумму первых 10000 натуральных чисел:

$$s(10000) = 1 + 2 + 3 + \dots + 9999 + 10000 = \frac{10000 \cdot (10000 + 1)}{2} = 50005000.$$

Теперь строго сформулируем

Принцип математической индукции

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами:

$$u(1), u(2), \dots, u(n), u(n+1), \dots$$

Допустим, что:

- 1) Установлено, что $u(1)$ верно. (Это утверждение называется *базой индукции*.)
- 2) Для произвольного номера n доказано, что если верно $u(n)$, то верно $u(n+1)$. (Это утверждение называется *шагом индукции*.)

Тогда все утверждения нашей последовательности $u(n)$ верны.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$.

Решение. В нашем случае утверждение имеет вид $u(n) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n)$.

Проверим верность базы индукции:

$$\text{Значение } u(1) \text{ равно: } u(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1) = \frac{6}{3} = 2.$$

Рассматриваемое равенство при $n=1$ имеет вид $1 \cdot 2 = 2$. Таким образом, база индукции доказана.

Теперь докажем шаг индукции.

Предположим, что утверждение $u(n)$ верно, тогда:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)}_{u(n)} + (n+1)(n+2) = \\ & = u(n) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n(1+n)(2+n) + (n+1)(n+2) = \\ & = (1+n)(2+n)\left(\frac{1}{3}n+1\right) = (1+n)(2+n)\frac{n+3}{3} = \\ & = \frac{1}{3}(n+1)(1+(n+1))(2+(n+1)) = u(n+1). \end{aligned}$$

Таким образом, шаг индукции доказан, а значит, рассматриваемая формула верна при всех натуральных n .

Пример 2. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ при $n \geq 2$.

Решение. В данном примере требуется доказать, что рассматриваемое неравенство верно для всех натуральных чисел, не меньших 2. На первый взгляд принцип математической индукции здесь применить нельзя, так как в базе индукции фигурирует значение выражения при $n = 1$. Однако, очевидно, что доказательство по индукции может быть произведено для всех натуральных чисел, больших или равных некоторого числа k , если его взять за базу индукции (по сути, первое по счету утверждение, которое верно).

Докажем, что база индукции (при $n = 2$ в данном случае) верна.

Для этого сравним числа:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \vee \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 \vee 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \vee 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 \vee 1^2 \Leftrightarrow 2 \vee 1.$$

Так как $2 > 1$, то и $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем шаг индукции.

Предположим, что при некотором n неравенство справедливо, тогда

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Сравним числа $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ и $\sqrt{n+1}$, для чего решим неравенство

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}:$$

$$\sqrt{n}\sqrt{n+1} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} + 1 > \sqrt{(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} + 1 > n + 1 \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} > n \Leftrightarrow n(n+1) > n^2 \Leftrightarrow n^2 + n > n^2 \Leftrightarrow n > 0.$$

Таким образом, мы получили, что неравенство $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ справедливо

при любых $n > 0$, а значит и при $n \geq 2$ тоже.

Отсюда мы получаем, что:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1},$$

или:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}.$$

А это как раз то, что нам требовалось доказать.

Таким образом, мы показали, что неравенство справедливо для любых натуральных $n \geq 2$.

Пример 3. Число $a + \frac{1}{a}$ является целым. Докажите, что числа $a^2 + \frac{1}{a^2}$, $a^4 + \frac{1}{a^4}$,

$a^8 + \frac{1}{a^8}$, $a^{16} + \frac{1}{a^{16}}$, ... также являются целыми.

Решение. В данном примере утверждение выглядит так:

$u(n) = (\text{число } a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \text{ при } n \geq 1 \text{ является целым, если } a + \frac{1}{a} \text{ целое число})$

Докажем базу индукции.

При $n = 1$ имеем:

$$a^{2^1} + \frac{1}{a^{2^1}} = a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \right) - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} = \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2.$$

Так как $a + \frac{1}{a}$ целое число, то очевидно, что и $a^2 + \frac{1}{a^2}$ будет целым.

Теперь докажем шаг индукции.

Предположим, что при некотором n утверждение $u(n)$ верно, тогда, рассмотрим

выражение $a^{2^{n+1}} + \frac{1}{a^{2^{n+1}}}$, и для него получим:

$$a^{2^{n+1}} + \frac{1}{a^{2^{n+1}}} = \left(a^{\frac{2^{n+1}}{2}} \right)^2 + \frac{1}{\left(a^{\frac{2^{n+1}}{2}} \right)^2} = \left(a^{2^n} \right)^2 + \frac{1}{\left(a^{2^n} \right)^2} =$$

$$= \left((a^{2^n})^2 + 2 \cdot a^{2^n} \cdot \frac{1}{a^{2^n}} + \frac{1}{(a^{2^n})^2} \right) - 2 \cdot a^{2^n} \cdot \frac{1}{a^{2^n}} = \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}} \right)^2 - 2 \cdot$$

Так как $a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}$ целое число, то мы получили, что и $a^{2^{n+1}} + \frac{1}{a^{2^{n+1}}}$ тоже целое.

Таким образом, утверждение доказано для всех натуральных n .

Н

- 1 а) Что такое математическая индукция?
- б) Из каких шагов состоит доказательство по индукции?
- в) Как называется каждый из этапов доказательства согласно методу математической индукции?
- 2 Предположим, что требуется доказать, что утверждение $u(n)$ верно при всех $n \geq 7$. Как в этом случае будет строиться доказательство с помощью метода математической индукции?
- 3 Предположим, что требуется доказать, что утверждение $u(n)$ верно при всех $n > -2$. Можно ли будет в этом случае провести доказательство с помощью метода математической индукции? Если нет, объясните, почему. Если да, то как будет строиться это доказательство с помощью метода математической индукции?
- 4 Докажите, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- 5 Докажите, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$.
- 6 Докажите, что $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^n(1+2+3+\dots+n)$.
- 7 Докажите, что $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \dots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^n(1+2+3+\dots+n)$.
- 8 Докажите, что $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ при $x \neq 1$ и $n \geq 0$.

П

- 9 Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

10 Число $a + \frac{1}{a}$ является целым. Докажите, что числа $a^n + \frac{1}{a^n}$ при $n \geq 2$ также являются целыми.

11 Докажите, что $\frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{120} + \frac{1}{210} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2 + 5n}{12(n+2)(n+3)}$.

12 Докажите, что n прямых, пересекающихся в одной точке и лежащих в одной плоскости, делят эту плоскость на $2n$ частей.

13 Докажите, что $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots}}}} < 3$ (пятерок — n штук).

14 Докажите, что $2^n > n^3$ при $n \geq 10$.

15 Докажите, что для любого n число $2n^3 - 3n^2 + n$ делится на 6.

16 Докажите, что для любых n чисел верно неравенство $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

М

17 Докажите, что $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

18 Докажите, что сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$ может быть сделана больше любого наперёд заданного числа m , если n выбрать достаточно большим.

19 Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 3$, $a_n = 7a_{n-1} + 3$. Докажите, что $a_n = \frac{7^n - 1}{2}$.

20 Докажите, что $\cos^{2n} \alpha + \sin^{2n} \alpha \leq 1$ при $n > 1$.

4.2. Табличное и графическое представление данных.

В курсе алгебры восьмого класса вы познакомились с основными формами графического и табличного представления данных, а также узнали множество числовых характеристик наборов данных.

Всё это призвано помочь исследователю, бизнесмену, учёному или другому специалисту выяснить интересные значения объектов из исследуемого набора, прояснить его характеристики, научиться прогнозировать его поведение и т.п.

Вы знаете, что данные могут быть представлены по-разному. Это могут быть списки чисел, таблицы, графики, диаграммы и пр. При этом, в конечном счёте, всегда анализируются наборы чисел. Вспомним, какие характеристики наборов чисел мы уже знаем.

Первой изученной нами характеристикой набора чисел, с которой мы познакомились сначала в 4-м, а затем в 8-м классе, было *среднее арифметическое* этого набора чисел, или кратко, просто *среднее*.

Среднее арифметическое (или просто *среднее*) набора чисел равно сумме этих чисел, делённой на их количество.

Например, на контрольном участке леса растёт 10 берёз, высота которых составляет (в метрах):

21; 20; 15; 18; 22; 11; 20; 19; 18; 20.

Среднее этого набора чисел (которое естественно назвать средней высотой берёз на этом участке леса) равно:

$$\frac{1}{10} \cdot (21 + 20 + 15 + 18 + 22 + 11 + 20 + 19 + 18 + 20) = \frac{184}{10} = 18,4 \text{ (м)}$$

Итак, средняя высота равна 18,4 м.

Очевидно, что при вычислении среднего арифметического несущественно, в каком порядке расположены числа набора. Для более подробного анализа набор чисел часто полезно упорядочить по возрастанию. Такой набор называют, как вы уже знаете, *упорядоченным набором*. Скажем, записав высоты берёз в виде упорядоченного набора, получим:

11, 15, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 21, 22.

Теперь хорошо видно, что высота самой низкой берёзы на этом участке равна 11 м, а самой высокой – 22 м. Важными характеристиками набора чисел также являются *наименьшее* и *наибольшее* число в наборе. Вычитая из наибольшего числа наименьшее, мы получим ещё одну важную характеристику – *размах набора*.

Размахом набора чисел называется разность наибольшего и наименьшего чисел этого набора.

В рассматриваемом примере размах равен $22 - 11 = 11$ (м).

Напомним, что размах набора чисел характеризует, насколько велик разброс чисел в этом наборе, насколько сильно максимальное число отличается от минимального.

Во многих ситуациях, например, в различных спортивных соревнованиях, небольшой разброс показателей означает стабильность результатов. Скажем, средние результаты двух спортсменов могут быть равны, но при этом разброс может быть различным.

Как вы уже знаете, среднее арифметическое чисел в наборе даёт представление о том, какое среднее число набора. Иногда среднее набора чисел является не очень удачной характеристикой этого набора, несёт мало информации о нём. Обычно это происходит, если числа набора сильно отличаются друг от друга.

Рассмотрим, к примеру, набор из 5 чисел: 1; 3; 4; 8; 199.

$$\text{Среднее этого набора равно } \frac{1}{5} \cdot (1 + 3 + 4 + 8 + 199) = \frac{215}{5} = 43.$$

Это число сильно отличается от всех чисел набора и не очень информативно. Первые четыре числа значительно меньше среднего, а последнее число сильно превосходит его.

Кроме нахождения среднего арифметического, имеется другой подход к ответу на вопрос, какое число можно было бы считать в некотором (уже другом) смысле средним. Оно так и называется, *серединным числом* набора или его *медианой*.

Медианой упорядоченного набора чисел называется число, стоящее посередине в этом наборе (если чисел нечётное количество) или среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине в этом наборе (если чисел чётное количество).

Так, в нашем случае медиана равна 4, и она гораздо лучше описывает набор данных.

Помимо медианы, также одной из важнейших характеристик набора чисел является мода, которая позволяет ответить на вопрос, какое значение наиболее часто встречается в наборе, более строго можно сказать, что:

Модой набора чисел называется число, встречающееся в этом наборе чаще других.

Мода может помочь, например, администратору магазина выяснить, упаковки какого объема пользуются наибольшим спросом, для того чтобы в дальнейшем скорректировать поставки в магазин со склада.

Важно отметить, что для нахождения моды не обязательно упорядочивать набор чисел, хотя в упорядоченном наборе моду находить легче, чем в неупорядоченном. Также стоит помнить, что в наборе может быть сразу несколько мод или же, если все числа набора различны, то у такого набора моды нет вообще.

Рассмотренные характеристики набора чисел называются, как вы знаете, *статистическими характеристиками*. Помимо данных характеристик существует

ещё две важнейшие характеристики, которые, по сути, заменяют собой разброс, медиану и моду, являясь оптимальным средством оценки разброса значений в данном числовом наборе.

Первая из них носит название *дисперсия*.

Предположим, что мы знаем среднее арифметическое нашего набора данных, которое будем обозначать $\bar{x}$. Вычислим сумму квадратов отклонений значений набора чисел от их среднего. Прделаем это на рассмотренном в начале параграфа примере с берёзами:

$$(21-18,4)^2 + (20-18,4)^2 + (15-18,4)^2 + (18-18,4)^2 + (22-18,4)^2 + (11-18,4)^2 + \\ + (20-18,4)^2 + (19-18,4)^2 + (8-18,4)^2 + (20-18,4)^2 = 94,4$$

Теперь легко найти среднее значение квадрата отклонения значения из числового набора от среднего значения этого набора, оно равно:

$$\frac{94,4}{10} = 9,44.$$

Полученная величина обозначается σ^2 , т. е. в нашем случае $\sigma^2 = 9,44$ и называется дисперсией данного набора чисел.

По сути, это число представляет собой квадрат среднего расстояния от среднего значения данного набора чисел, до чисел из этого набора.

Чем меньше значение дисперсии, тем кучнее собраны числа вокруг их среднего значения.

Само собой, так как дисперсия представляет собой, как мы выяснили ранее, по сути квадрат расстояния, то её не всегда удобно использовать, поэтому часто рассматривают арифметический квадратный корень из дисперсии, который обозначается σ и называется *среднеквадратическим отклонением*.

В нашем случае среднеквадратическое отклонение равно:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9,44} = 3,07.$$

В отличие от дисперсии, среднеквадратическое отклонение уже гораздо точнее характеризует среднее значение расстояния от среднего значения данного набора чисел, до каждого из чисел набора.

Запишем определение дисперсии и среднеквадратического отклонения набора чисел.

Дисперсией набора чисел называется число, представляющее собой среднее арифметическое квадратов разностей между средним арифметическим чисел данного набора и числами данного набора.

Среднеквадратическим отклонением называется число, равное арифметическому квадратному корню из дисперсии данного набора чисел.

Теперь поговорим о том, каким образом можно графически представить набор данных.

Предположим, был произведено исследование покупаемости питьевой воды в бутылках разной ёмкости (на протяжении получаса записывалась информация, о том, бутылки какого объёма покупались). В результате был получен набор из 19 чисел, который после упорядочивания имеет следующий вид:

0,2; 0, 33; 0,33, 0,5; 0,5; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 0,6; 1; 1; 1; 1; 1,5; 1,5; 2; 2.

Для упрощения работы, представим данные в виде таблицы:

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Количество купленных бутылок	1	2	2	6	4	2	2

Обратите внимание, что если провести более подробное исследование, изучив, скажем, 500 покупок, то соответственная таблица не станет более громоздкой – в ней только увеличатся числа, стоящие в нижней строке. Такая таблица может иметь, например, такой вид:

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Количество купленных бутылок	11	23	82	154	110	76	44

Числа, стоящие в нижней строке, называются *частотами*. Сама такая таблица называется *таблицей частот*. Числа, стоящие в верхней строке таблицы частот, обычно упорядочиваются по возрастанию. Понятно, что сумма всех частот равна количеству чисел в наборе.

С помощью таблицы частот некоторые статистические характеристики набора чисел находить значительно удобнее, чем непосредственно по самому набору.

Так, чтобы найти моду нужно найти наибольшую частоту и взять соответствующее этой наибольшей частоте число.

При нахождении среднего по таблице частот нужно каждое число умножить на его частоту, полученные произведения сложить, а затем разделить на количество чисел в наборе.

Вычислим средние для каждой из приведённых выше таблиц.

Для первой таблицы:

$$\frac{1}{19} \cdot (0,2 \cdot 1 + 0,33 \cdot 2 + 0,5 \cdot 2 + 0,6 \cdot 6 + 1 \cdot 4 + 1,5 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = \frac{16,46}{19} \approx 0,87.$$

Для второй таблицы:

$$\frac{1}{500} \cdot (0,2 \cdot 11 + 0,33 \cdot 23 + 0,5 \cdot 82 + 0,6 \cdot 154 + 1 \cdot 110 + 1,5 \cdot 76 + 2 \cdot 44) = \frac{455,19}{500} \approx 0,91.$$

Как видим, средние оказались достаточно близкими числами.

Правило нахождения медианы по таблице частот следующее. Складываем последовательно частоты слева направо, т.е. берём первую частоту, затем находим сумму первой и второй частот, затем к полученному числу прибавляем третью частоту, и т.д. Полученные числа имеют специальное название – *накопленные частоты*. Когда с ними приходится работать, то удобно их вносить в таблицу частот, добавив для них отдельную строку. Сделаем это, скажем, для второй таблицы (заодно внеся в неё и термин «частота»):

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Частота	11	23	82	154	110	76	44
Накопленная частота	11	34	116	270	380	456	500

Ищем в строке накопленных частот две стоящие рядом накопленные частоты, левая из которых меньше половины количества чисел в наборе, а правая – больше. Медианой является число из первой строки таблицы, соответствующее большей из этих двух накопленных частот.

В нашем примере половина количества чисел в наборе – это 250. Накопленная частота числа 0,5 равна 116, а числа 0,6 равна 270. Таким образом, медиана равна 0,6.

Наряду с частотами при обработке данных используются также и *относительные частоты*. Относительная частота числа, входящего в исследуемый набор чисел, равна его частоте, делённой на количество чисел в наборе. При этом, чтобы не возникало путаницы, частоту называют также *абсолютной частотой*.

Сумма относительных частот равна единице.

Во многих ситуациях относительные частоты оказываются удобнее абсолютных. Скажем, если мы хотим сравнить два набора чисел, рассмотренных в самом начале данного параграфа, и добавим к имеющимся таблицам строку относительных частот, то сможем легко ответить на вопросы, ответ на которые по таблице абсолютных частот был бы не сразу очевидным.

Сначала рассмотрим таблицу для набора из 19 чисел:

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Абсолютная частота	1	2	2	6	4	2	2
Относительная частота	0,05	0,105	0,105	0,32	0,21	0,105	0,105

Теперь рассмотрим таблицу для набора из 500 чисел:

Ёмкость бутылки (л)	0,2	0,33	0,5	0,6	1	1,5	2
Абсолютная частота	11	23	82	154	110	76	44
Относительная частота	0,02	0,05	0,16	0,31	0,22	0,15	0,09

Если бы мы попытались по исходным таблицам понять, в какой из них большим спросом пользуются, например, бутылки ёмкостью 2 л, то для этого пришлось бы проводить дополнительные вычисления. В таблице относительных частот эти вычисления уже проведены, и мы видим, что большим спросом двухлитровые бутылки пользуются в первой таблице – их доля в общем числе продаж составляет примерно 0,105, против доли 0,09 во второй таблице. Довольно часто относительные частоты выражают в процентах.

Для нахождения среднего с помощью таблицы относительных частот нужно каждое число умножить на его относительную частоту и полученные произведения сложить.

Также удобно искать дисперсию с помощью таблицы относительных частот. Можно доказать, что это может быть сделано гораздо проще, чем при обычном поиске, когда ищутся все разности между числами ряда и их средним значением, после чего они возводятся в квадрат, суммируются и делятся на их количество. Для того чтобы найти дисперсию с помощью таблицы относительных частот, нужно каждое число возвести в квадрат, умножить его на его относительную частоту, полученные произведения сложить, после чего вычесть из полученной суммы квадрат среднего значения, которое можно получить, так, как описано ранее.

Скажем, в случае с примером, в котором анализировались продажи 500 бутылок, мы получим (см. таблицу выше) следующие значения среднего и дисперсии, согласно описанной методике:

среднее значение:

$$0,02 \cdot 0,2 + 0,05 \cdot 0,33 + 0,16 \cdot 0,5 + 0,31 \cdot 0,6 + 0,22 \cdot 1 + 0,15 \cdot 1,5 + 0,09 \cdot 2 = 0,91.$$

дисперсия:

$$0,02 \cdot 0,2^2 + 0,05 \cdot 0,33^2 + 0,16 \cdot 0,5^2 + 0,31 \cdot 0,6^2 + 0,22 \cdot 1^2 + 0,15 \cdot 1,5^2 + 0,09 \cdot 2^2 - 0,91^2 = 0,244.$$

На уроках математики в пятом, шестом и восьмом классах мы подробно изучали линейные и столбчатые диаграммы. Как вы уже знаете, в статистике их широко используют для наглядного представления данных, причём в основном столбчатые. Немного поговорим о них.

Скажем, в таблице представлены результаты тестирования группы из 100 одиннадцатиклассников по математике:

Количество баллов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество школьников	3	5	7	10	16	23	20	11	5

Во второй строке стоят абсолютные частоты. Построим для них столбчатую диаграмму (см. рис. 4.1).

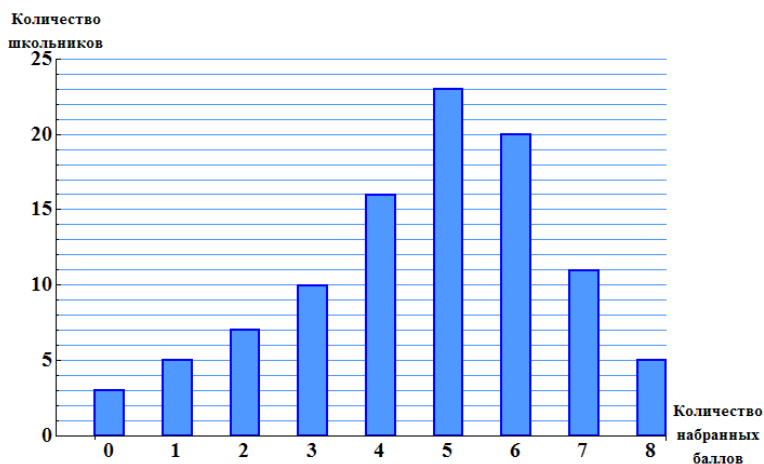


Рис. 4.1

Из этой диаграммы хорошо видны результаты тестирования. Скажем, ясно, что большинство учеников набрали 5 баллов, также видно, что плохо справились с тестом меньшинство, равно как и набрали максимальный балл. Такого рода поведение экспериментальных данных является достаточно распространённым.

Чтобы сравнить между собой несколько наборов данных, полученных в сходных ситуациях, для них удобно строить совместные диаграммы частот, как правило, относительных. По полученным ранее таблицам построим для них совместную столбчатую диаграмму относительных частот:

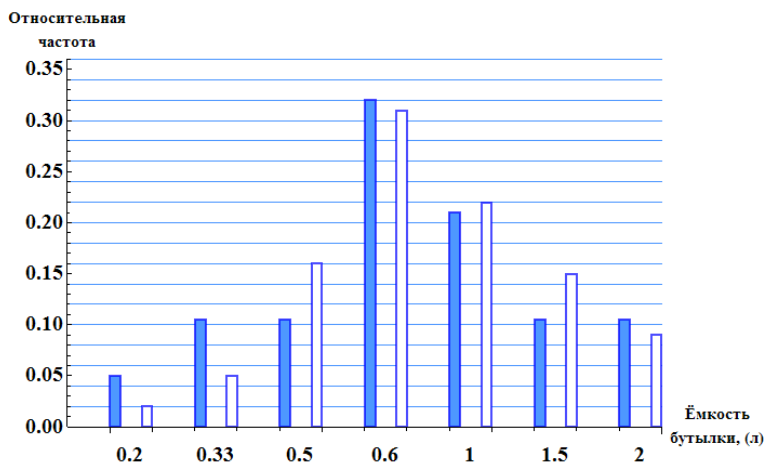


Рис. 4.2

Н

- 1 а) Что такое среднее арифметическое набора чисел?
 б) Что такое размах набора чисел?
 в) Что такое медиана упорядоченного набора чисел?
 г) Что такое медиана произвольного набора чисел?
 д) Что такое мода набора чисел?
 е) Что такое дисперсия набора чисел?
 з) Что такое среднеквадратическое отклонение набора чисел?

2 Найдите среднее, размах, медиану, моду, дисперсию и среднеквадратическое отклонение набора чисел.

- а) 8, 15, 7, 9, 2, 19, 19, 9, 3, 8;
 б) 8, 18, 13, 17, 15, 0, 7, 12, 4, 11;
 в) 3, 1, 12, 5, 9, 17, 6, 17, 17, 13;
 г) 5, 10, 15, 19, 11, 10, 8, 13, 6, 11.

3 Найдите дисперсию и среднеквадратическое отклонение набора чисел.

- а) $-6; -5; 4; 1; 5; 10; 8; 0; -5; 7; -9; 8; -6; -8; 10; -7; -6; -2; -10; -8;$
 б) $6; 7; -3; 5; -5; -1; 2; 10; -4; 0; 0; 9; 1; -2; 1; -1; 8; 4; -1; 4.$

4 В таблице приведены данные об измерениях температуры воздуха в каждый день первой недели мая (измерения проводились в 14.00):

Дата	01.05	02.05	03.05	04.05	05.05	06.05	07.05
Температура, °C	18	12	15	13	12	12	23

- а) Какая средняя температура за неделю?
 б) Какое значение температуры самое часто встречающееся?
 в) Какова дисперсия температуры?

5 В таблице приведены данные об измерениях объемов производства железа в России за период 1996–2002 гг.:

Год	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Объем производства, млн т	38	39	40	47	51	49	49

- а) Сколько в среднем производилось железа в России за указанный период времени?

- б) Каков размах производства железа за эти годы?
 в) Какова медиана производства железа за этот период?
 г) Какова мода производства железа за этот период?

6 В таблице приведены данные по измерению среднего объёма удоя коровы за 6 месяцев на некоторой ферме:

Месяц	январь	февраль	март	апрель	май	июнь
Удой молока, л	6	6,5	8	7	6	7,5

- а) Сколько молока давала корова в среднем за эти 6 месяцев?
 б) Каков разброс объёма среднего удоя с одной коровы на этой ферме?
 в) Какова медиана удоя молока за обозначенное время?

- 7** а) Что называется абсолютной частотой числа, входящего в набор?
 б) Чему равна сумма всех абсолютных частот?
 в) Что называется относительной частотой числа, входящего в набор?
 г) Чему равна сумма всех относительных частот?

8 Расскажите, приводя примеры, как по таблице абсолютных частот найти:

- а) среднее; в) медиану; д) дисперсию;
 б) размах; г) моду; е) среднеквадратическое отклонение.

9 Расскажите, приводя примеры, как по таблице относительных частот найти:

- а) среднее; в) медиану; д) дисперсию;
 б) размах; г) моду; е) среднеквадратическое отклонение.

10 Расскажите, приводя примеры, как находится медиана по таблице:

- а) накопленных абсолютных частот;
 б) накопленных относительных частот.

11 Найдите по таблице частот среднее, размах, моду, медиану, дисперсию.

Количество баллов, набранных на тестировании	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Количество школьников	2	4	5	7	9	11	12	7	3

12 Восстановите частоты в таблице, зная накопленные частоты.

Число	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Частота										
Накопленная частота	2	13	18	20	22	25	30	35	40	50

13 Найдите по таблице среднее число фильмов, снимавшихся за год в России в первом десятилетии XXI века. Найдите также размах, моду и медиану.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Количество фильмов	65	66	95	120	110	153	205	255	231	216

14 Составьте по диаграмме таблицу.

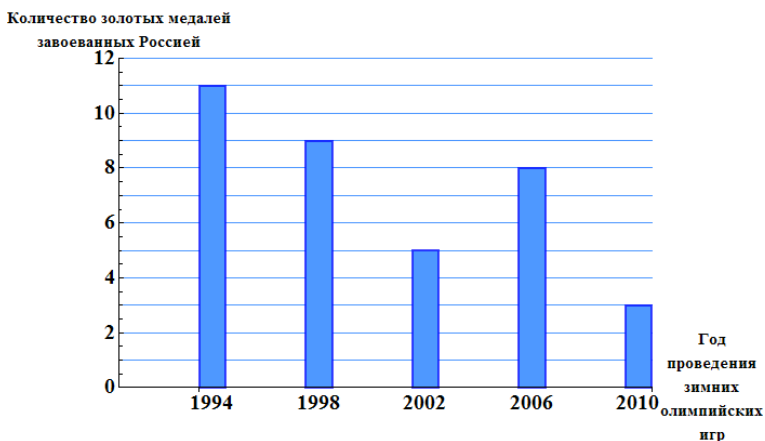


Рис. 4.3

15 Приведите пример набора чисел, где медиана является более удачной характеристикой набора, чем среднее арифметическое, и приведите пример, где наоборот.

16 Приведите пример набора чисел, где мода является более удачной характеристикой набора, чем среднее арифметическое, и приведите пример, где наоборот.

17 Приведите пример набора чисел, где мода является более удачной характеристикой набора, чем медиана, и приведите пример, где наоборот.

18 В некоторой компании проанализировали окончания фамилий мужчин-сотрудников в течение трёх последовательных лет. По представленной таблице постройте совместную столбчатую диаграмму относительных частот и совместную столбчатую диаграмму абсолютных частот.

Окончание	"ов"	"ев"	"ин"	"ко"	"или"
2011 г.	25	18	8	8	1
2012 г.	32	12	12	5	0
2013 г.	48	11	13	5	2

П

19 Есть набор экспериментальных данных, который представлен в таблице:

Значение величины	x_1	x_2	x_3	x_4
Абсолютная частота	v_1	v_2	v_3	v_4
Относительная частота	p_1	p_2	p_3	p_4

Докажите, что формулы для расчёта среднего и дисперсии, описанные в параграфе, дают одинаковые результаты, а именно, что:

а) среднее значение: $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4$;

б) дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_3^2 + p_4 x_4^2 - \bar{x}^2.$$

20 Есть набор экспериментальных данных, который представлен в таблице:

Значение величины	1	2	3	4
Относительная частота	$\frac{1}{10}$	x	y	$\frac{1}{2}$

Найдите неизвестные значения относительных частот, если известно, что среднее значение равно $\frac{13}{4}$.

М

21] Есть набор экспериментальных данных, который представлен в таблице:

Значение величины	1	2	3	4	5
Относительная частота	$\frac{1}{10}$	x	y	$\frac{1}{6}$	z

Найдите неизвестные значения относительных частот, если известно, что среднее значение равно $\frac{13}{5}$, а дисперсия равна $\frac{4}{5}$.

22] Есть набор экспериментальных данных, который представлен в таблице:

Значение величины	1	2	3	4	5
Относительная частота	$\frac{1}{3}$	x	y	$\frac{1}{20}$	z

Найдите неизвестные значения относительных частот, если известно, что среднее значение равно 3, а дисперсия равна σ^2 . При каких значениях σ^2 задача имеет решение?

4.3. Элементы комбинаторики

Часто в реальной жизни мы можем встретиться с вопросами такого рода:

1) Друзья хотят погулять, а потом посмотреть фильм. Сколько дней они могут посещать разные кинотеатры и разные парки, если в городе 4 кинотеатра и 3 парка?

2) Своему сыну отец сказал прочесть 5 книг за лето, сколько вариантов последовательностей прочтения книг существует?

3) У бабушки 6 трёхлитровых банок, однако ягод хватит только для того, чтобы приготовить 4 полные банки варенья. Сколько существует вариантов выбора необходимого числа банок из имеющегося количества?

4) Сколькими способами можно составить список работников, которым требуется выполнить определённую работу, если для ее выполнения требуется 3 работника, а всего их 6?

Для того чтобы отвечать на эти и другие похожие вопросы, служит раздел математики, который называется *комбинаторика*.

Рассмотрим каждую из задач по отдельности подробнее.

Задача 1. Друзья хотят погулять, а потом посмотреть фильм. Сколько дней они могут посещать разные кинотеатры и разные парки, если в городе 4 кинотеатра и 3 парка?

Ясно, что эта задача может быть легко решена простым перебором. Если мы расположим парки как строки таблицы, а кинотеатры как столбцы, то на пересечении соответствующей строки и столбца будет стоять один возможный вариант, который мы будем обозначать для краткости $(i; j)$, где i – номер парка, j – номер кинотеатра.

	Кинотеатр 1	Кинотеатр 2	Кинотеатр 3	Кинотеатр 4
Парк 1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)
Парк 2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)
Парк 3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)

Из этой таблицы ясно, что друзья могут на протяжении $3 \cdot 4 = 12$ дней посещать парки и кинотеатры по-разному.

Рассмотрение этой, казалось бы, простейшей задачи приводит к одному из важных принципов комбинаторики, который называется

Правило произведения

Пусть некоторый выбор требует выполнения одного за другим k действий. Если первое действие можно выполнить k_1 способами, второе (после него) — k_2 способами, третье — k_3 способами и так до n -го действия, которое можно выполнить k_n способами (после выполнения предыдущих $n-1$ действий), то все k действий в указанном порядке можно выполнить $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_{n-1} \cdot k_n$ способами.

Зная этот принцип, решение любой похожей задачи можно найти легко и просто.

Пример 1. Из города A в город B ведёт 4 дороги, из города B в город V ведёт 5 дорог, из города V в город $Г$ ведёт 7 дорог. Сколькими способами путник может пройти путь из города A в город $Г$?

Решение. Исходя из правила произведения, легко найти, что количество возможных путей равно: $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$.

Задача 2. Отец сказал своему сыну прочесть 5 книг за лето. Сколько вариантов последовательностей прочтения книг существует?

Решить эту задачу можно двумя способами, первый заключается в том, чтобы перечислить все возможные варианты. Приложив большое количество усилий и внимания, можно найти их все. Скажем, если обозначить книги цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и каждой последовательности чтения книг поставить в соответствие число, скажем 12345, то мы получим следующий набор возможностей:

12345	12354	12435	12453	12534	12543
13245	13254	13425	13452	13524	13542
14235	14253	14325	14352	14523	14532
15234	15243	15324	15342	15423	15432
21345	21354	21435	21453	21534	21543
23145	23154	23415	23451	23514	23541
24135	24153	24315	24351	24513	24531
25134	25143	25314	25341	25413	25431
31245	31254	31425	31452	31524	31542
32145	32154	32415	32451	32514	32541
34125	34152	34215	34251	34512	34521
35124	35142	35214	35241	35412	35421
41235	41253	41325	41352	41523	41532
42135	42153	42315	42351	42513	42531
43125	43152	43215	43251	43512	43521
45123	45132	45213	45231	45312	45321
51234	51243	51324	51342	51423	51432
52134	52143	52314	52341	52413	52431
53124	53142	53214	53241	53412	53421
54123	54132	54213	54231	54312	54321

Легко сосчитать, что их 120.

Однако такое решение данной задачи крайне громоздко. Его можно использовать только если стоит задача перечислить явно все эти возможности.

Для быстрого решения этой задачи можно рассуждать так: первой сын может читать любую из пяти книг, второй — любую из четырёх оставшихся, третьей — любую из трёх оставшихся, четвёртой — любую из оставшихся двух и, наконец, пятой — только одну оставшуюся после прочтения четырёх книг книгу.

Такого рода рассуждение позволяет с помощью правила произведения найти количество возможных вариантов следующим образом:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Как видно, мы получили тот же самый результат.

Числовое выражение, которое встретилось при решении этой задачи, представляет собой произведение первых пяти последовательных натуральных чисел: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Он имеет специальное обозначение $5!$ и читается «факториал пяти», или «пять факториал».

Факториалом натурального числа n , большего единицы, называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно. Факториал обозначается $n!$

Принято считать, что факториал единицы равен единице.

Для удобства решения задач полагают также, что факториал нуля равен единице.

Таким образом:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n,$$

$$1! = 1; \quad 0! = 1.$$

В комбинаторике задачи, подобные рассмотренной, называются задачами о перестановках. Само определение перестановок и их количества звучит так:

Число различных способов, которыми может быть упорядочено данное множество объектов (количество способов их пронумеровать), состоящее из n элементов, называется *числом перестановок* множества и обозначается P_n .

Число перестановок множества равно $P_n = n!$

С помощью формулы числа перестановок, можно с легкостью решать задачи, похожие на рассмотренную.

Пример 2. Сколькими способами можно рассадить в ряд 10 человек.

Решение. В данном случае нас интересует число перестановок во множестве, содержащем 10 элементов (10 человек). Согласно рассмотренной выше формуле, оно равно:

$$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Таким образом, рассадить даже 10 человек можно астрономически большим количеством способов, превышающем 3,5 миллиона вариантов. Решение этой задачи прямым перечислением практически невозможно, не говоря уже о множествах с большим количеством элементов.

Ниже представлена таблица, в которой приведены значения факториалов первых 20 натуральных чисел.

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000

Задача 3. У бабушки 6 трёхлитровых банок, однако ягод хватит только для того, чтобы приготовить 4 полных банки варенья. Сколько существует вариантов выбора необходимого числа банок из имеющегося количества?

Пытаться решать эту задачу, подобно тому, как мы пытались делать это ранее, т.е. прямым перебором, мы не будем. Вместо этого будем рассуждать сразу по образцу того, как решалась задача 2.

Так как у бабушки всего 6 банок, а заполнить вареньем она может только четыре из них, то в качестве первой для заполнения банки она может выбрать любую из шести имеющихся, в качестве второй — любую из пяти оставшихся, в качестве третьей — любую из четырёх и наконец в качестве четвёртой — любую из трёх.

Таким образом, согласно правилу умножения, существует $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ вариантов.

Подобный тип задач в комбинаторике называется задачами о размещении. Определение размещения и их количества звучит так:

Число упорядоченных k -элементных подмножеств множества из n элементов называется числом *размещений* из n элементов по k и обозначается A_n^k .

Число размещений из n элементов по k равно $A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Пример 3. Школьнику необходимо написать 5 контрольных работ за 9 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Данная задача сводится к поиску количества размещений из 9 по 5. Искомое количество способов равно:

$$A_9^5 = \frac{P_9}{P_{9-5}} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120.$$

Задача 4. Сколькими способами можно составить список работников, которым требуется выполнить определённую работу, если для ее выполнения требуется 3 работника, а всего их 6?

Будем рассуждать на основе того, что мы уже знаем. Нам требуется выбрать 3 из 6 работников. Количество подобных выборов можно определить как количество размещений из 6 элементов по 3. Но в нашем случае нам не важен порядок следования людей в полученном списке, т. е. не имеет значения, скажем, были ли выбраны Ваня, Петя и Даша или Петя, Ваня и Даша. Значит, нужно количество всевозможных упорядоченных троек разделить на количество способов упорядочивания каждой такой тройки. Таким образом, в нашем случае существует

$$\frac{A_6^3}{P_3} = \frac{\frac{6!}{(6-3)!}}{3!} = \frac{\frac{6!}{3!}}{3!} = \frac{6!}{(3!)^2} = 20 \text{ способов.}$$

Для решения такого типа задач в комбинаторике служит понятие *числа сочетаний*.

Произвольное k -элементное подмножество n -элементного множества называется *сочетанием* (комбинацией) из n элементов по k ($k \leq n$). Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

Число сочетаний из n элементов по k равно:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 4. В пенале 9 ручек разного цвета. Сколькими способами можно выбрать 4 ручки разного цвета?

Решение. В данном случае задача сводится к поиску количества сочетаний из 9 элементов по четыре, оно равно:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = 126.$$

С числом сочетаний из n элементов по k мы сталкивались ранее, когда изучали бином Ньютона, т.е. разложение n -й степени двучлена $x + y$.

Вы знаете, что, первые несколько степеней двучлена выглядят следующим образом:

$$(x + y)^0 = 1,$$

$$(x + y)^1 = x + y,$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3,$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

...

Коэффициенты перед слагаемыми берутся из треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Треугольник Паскаля устроен так, что каждый элемент в строке ниже равен сумме элементов, стоящих в предыдущей строке справа и слева от него.

Можно доказать, что коэффициент перед слагаемым вида $x^n y^k$ равен C_n^k , т. е. треугольник Паскаля, по сути, состоит из значений числа сочетаний из n элементов по k и является набором их значений.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\ & & & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\ & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\ & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\ C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & \end{array}$$

Из рассмотрения треугольника Паскаля следует несколько интересных свойств сочетаний из n элементов по k . Вот некоторые из них:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k, \quad C_n^k = C_n^{n-k}$$

Докажем их, используя определение числа сочетаний n элементов по k :

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!(k-1)!} \frac{n-k+k}{k(n-k)} = \\ &= \frac{(n-1)!n}{((n-k-1)!(n-k))((k-1)!k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k, \end{aligned}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Н

- 1 а) Что называется правилом произведения? В чём оно заключается?
 б) Что такое перестановка? Чему равно количество перестановок элементов в множестве, содержащем n элементов?
 в) Что такое размещение? Чему равно количество размещений из n элементов по k ?
 г) Что такое сочетание? Чему равно количество сочетаний из n элементов по k ?
- 2 а) Что такое факториал?
 б) Чему равен факториал 0?
- 3 а) Что такое бином Ньютона?
 б) Как определяются коэффициенты перед слагаемыми бинома Ньютона?
 в) Что такое треугольник Паскаля? Как он устроен и как связан с количеством сочетаний из n элементов по k ?
 г) Какие свойства числа сочетаний из n элементов по k вы знаете?

4 Вычислите.

а) P_3 ; в) A_{11}^4 ; д) C_{20}^{19} ;

б) P_5 ; г) A_8^3 ; е) C_{17}^3 .

5 Монету бросают четыре раза. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

6 В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и вице-капитана. Сколькими способами это можно сделать?

7 Сколькими способами можно разложить 10 монет различного достоинства по четырём карманам?

8 Номер автомашины состоит из трёх букв русского алфавита (используется 30 букв) и трёх цифр: сначала идет буква, затем три цифры, а затем ещё две буквы. Сколько существует различных номеров автомашин?

9 В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно распределить по вагонам 12 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

10 Анаграммой называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слова «комбинаторика»?

11 Чемпионат России по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если участвуют 18 шахматистов?

12 На окружности дано n различных точек. Сколько имеется треугольников с вершинами в этих точках?

13 Сколько можно составить телефонных номеров из 7 цифр каждый, так чтобы все цифры были различны?

П

14 Сколько существует шестизначных чисел, у которых по три чётных и нечётных цифры?

15 Известно, что в выпуклом n -угольнике ($n > 3$) никакие 3 диагонали не проходят через одну точку. Найдите число точек (отличных от вершины) пересечения пар диагоналей.

16 Имеется m белых и n чёрных шаров, причём $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

- 17 Имеется 30 человек – 15 юношей и 15 девушек. Сколько существует способов составить компанию, в которой было бы одинаковое число юношей и девушек?
- 18 Сколькими способами можно составить букет из 17 цветков, если в продаже имеются гвоздики, розы, гладиолусы, ирисы, тюльпаны и васильки?
- 19 Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зелёных шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?
- 20 На контрольной работе десяти школьникам был предложен тест, состоящий из нескольких вопросов. Известно, что любые пять школьников ответили вместе на все вопросы (т. е. на каждый вопрос хоть один из пяти дал правильный ответ), а любые четыре – нет. При каком минимальном количестве вопросов это могло быть?

М

- 21 Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.
- 22 Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$.
- 23 Докажите, что $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ и $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$.
- 24 Двадцать городов соединены 172 авиалиниями. Докажите, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).

4.4. Вычисление простейших вероятностей

Ещё в курсе математики пятого класса вы познакомились с понятием случайного эксперимента и случайного события. Такой эксперимент, исход которого заранее, до его проведения, нам неизвестен, но известно множество всех возможных исходов, называют *случайным экспериментом*, или более длинно, *экспериментом со случайными исходами*.

Например, когда бросается игральный кубик, то мы заранее знаем, что на его верхней грани может оказаться число 1; 2; 3; 4; 5 или 6. Какое именно из них окажется на верхней грани упавшего кубика (говорят «сколько очков выпадет»), заранее сказать нельзя. Множество исходов этого случайного эксперимента, таким

образом, следующее: $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Итоги случайного эксперимента ещё называют *элементарными случайными событиями*, а множество всех итогов случайного эксперимента называется *пространством элементарных событий*. Оно обозначается обычно греческой буквой Ω или латинской буквой E . Скажем, в описанном выше случайном эксперименте пространством элементарных событий является множество $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Очень часто случайный эксперимент моделируется следующим образом. Представим, что у нас имеется ящик, в котором лежат неразличимые на ощупь предметы, например, карточки или шарики. Из этого ящика наугад вынимается несколько таких предметов.

Например, эксперимент с бросанием игрального кубика можно смоделировать так. В ящике лежит 6 карточек, на которых написаны числа 1; 2; 3; 4; 5 и 6. Наугад вынимается одна карточка.

Случайным событием (или для краткости просто событием) называется любое множество, элементами которого являются элементарные события. Можно сказать по-другому: случайное событие – это любое подмножество пространства элементарных событий. Скажем, в примере с бросанием игрального кубика рассмотрим события $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{5; 6\}$, $C = \{1; 3; 4; 6\}$. Для первых двух из этих событий можно дать словесные описания, скажем такие: A – выпало чётное количество очков, B – выпало более 4 очков. Для события C краткое словесное описание вряд ли возможно.

Когда мы проводим случайный эксперимент, то он заканчивается каким-то конкретным итогом. Если этот итог является элементом множества, представляющего событие M , то мы говорим, что при этом итоге *произошло событие M* , а такой итог называется *благоприятным* для события M . Скажем, если при бросании игрального кубика выпало 4 очка, то произошли события A и C , а событие B не произошло. Итог «выпало 4 очка» благоприятен для событий A и C и неблагоприятен для события B .

Среди подмножеств любого множества выделяются два – оно само и пустое множество. В случае пространства элементарных событий эти подмножества имеют особые названия. Пустое множество называется *невозможным событием* и обозначается, как обычно – знаком $\emptyset$, а всё пространство элементарных событий называется *достоверным событием* и обозначается соответственно Ω или E .

Эти события в конкретных ситуациях иногда могут иметь словесные описания. Например, в случайном эксперименте с бросанием игрального кубика можно попытаться рассмотреть событие «выпало 7 очков». Поскольку множество $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ не содержит элемента 7, то ясно, что речь идёт о пустом подмножестве. В то же время, понятно, что 7 очков при бросании игрального кубика никогда не выпадет, такое событие не может произойти, отсюда и название «невозможное событие». Если в том же случайном эксперименте рассмотреть, скажем, событие «выпало менее 7 очков», то ему соответствует всё множество E , и в то же время

понятно, что это событие обязательно произойдет, сколько бы конкретно очков не выпало при бросании кубика. Этим объясняется название «достоверное событие».

Понятно, что любой исход случайного эксперимента благоприятен достоверному событию и неблагоприятен невозможному событию.

Важным понятием является *равновозможность* исходов случайного эксперимента (или элементарных событий). В курсе математики пятого и шестого классов вы часто употребляли конструкции вида «ни один исход не имеет никаких преимуществ перед другими», «ни один исход ничем не лучше и не хуже любого другого», и т.д. Они достаточно точно характеризуют ситуацию. Скажем, наш опыт бросания игрального кубика показывает, что если кубик сделан из однородного материала и бросается так, что достаточно долго движется, прежде чем остановиться, выпадение любого количества очков равновозможно с любым другим. Точно так же, при вынимании наугад карточки из ящика в случае, когда ящик непрозрачен, когда эти карточки одинаковы на ощупь, вынимающий карточку «не подглядывает», и т.д., исходы этого случайного эксперимента равновозможны.

Мы будем рассматривать понятие вероятности события в следующей ситуации. Случайный эксперимент таков, что выполняются условия:

- 1) Пространство элементарных событий конечно.
- 2) Все эти элементарные события равновозможны.

Эта ситуация традиционно называется в теории вероятностей *классической схемой* или *классической моделью*.

Вероятностью события в классической модели называется отношение количества благоприятных этому событию исходов к общему количеству исходов.

Вероятность обозначается латинской буквой P (с этой буквы начинается слово «вероятность» на латыни). Скажем, вероятность события A обозначается $P(A)$.

Таким образом, можно записать такую формулу (известную вам ещё из курса математики пятого класса):

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

где n – общее количество исходов случайного эксперимента,
 m_A – количество исходов, благоприятных событию A .

Скажем, в рассмотренном выше примере с бросанием игрального кубика $n = 6$; $m_A = 3$; $m_B = 2$; $m_C = 4$. Это позволяет найти вероятности этих событий:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Данное выше определение вероятности хорошо согласуется с принятыми в обиходе и хорошо понятными фразами, вроде «Имеется 2 шанса из 6 произойти событию B ».

Поскольку нет ни одного исхода случайного эксперимента, благоприятного невозможному событию, $m_{\varnothing} = 0$, понятно, что вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = \frac{m_{\varnothing}}{n} = \frac{0}{n} = 0$. Аналогично, поскольку все исходы случайного эксперимента благоприятны достоверному событию, $m_{\Omega} = n$, понятно, что вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = \frac{m_{\Omega}}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Из определения вероятности следует, что вероятность любого события – число, заключённое в пределах от нуля до единицы включительно: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример 1. На соревнования по прыжкам в воду приехало 12 спортсменов: 4 из Китая, 3 из России, 3 из Англии и 2 из Австралии. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет выступать спортсмен из России.

Решение. Очевидно, здесь общее количество исходов случайного эксперимента равно количеству спортсменов, т.е. $n = 12$. Количество благоприятных исходов равно количеству спортсменов из России, т.е. $m = 3$. Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{3}{12} = 0,25$.

Ответ: 0,25.

Основные трудности, причём иногда очень существенные, заключаются в нахождении m и n в конкретных ситуациях.

Пример 2. Три мальчика и две девочки отправились в поход. Им нужно назначить двух дежурных по лагерю. Они написали свои имена на одинаковых бумажках, сложили их в пустой рюкзак и вынули наугад две бумажки. Какова вероятность того, что дежурить будут: а) два мальчика; б) две девочки; в) мальчик и девочка?

Решение. Изобразим каждого из мальчиков, отправившихся в поход, белым кружочком, а каждую из девочек – чёрным кружочком. Всего получится пять кружочков – два чёрных и три белых. Каждая пара дежурных может быть изображена с помощью отрезка, соединяющего два соответствующих кружочка. Всего таких отрезков, как видно из рис. 4.4 а), имеется 10.

При этом ни одна из пар дежурных не имеет никаких преимуществ перед другими парами, т.е. все исходы случайного эксперимента по выбору пары дежурных равновозможны.

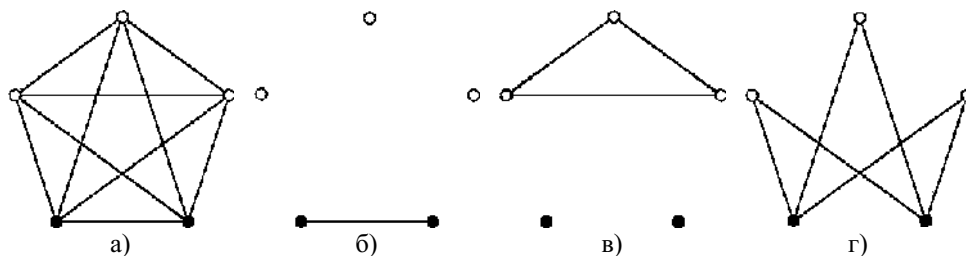


Рис. 4.4

На рис. 4.4 б) изображены пары дежурных, состоящие из двух девочек. Такая пара имеется лишь одна. Другими словами, случайному событию «будут дежурить две девочки» благоприятен 1 исход случайного эксперимента, а, значит, вероятность этого события равна $\frac{1}{10}$.

На рис. 4.4 в) изображены пары дежурных, состоящие из двух мальчиков. Таких пар имеется 3. Другими словами, случайному событию «будут дежурить два мальчика» благоприятны 3 исхода случайного эксперимента, а, значит, вероятность этого события равна $\frac{3}{10}$.

На рис. 4.4 г) изображены пары дежурных, состоящие из мальчика и девочки. Таких пар имеется 6. Другими словами, случайному событию «будут дежурить мальчик и девочка» благоприятны 6 исходов случайного эксперимента, а, значит, вероятность этого события равна $\frac{6}{10}$ или $\frac{3}{5}$.

Ответ: С вероятностью 0,1 будут дежурить две девочки, с вероятностью 0,3 будут дежурить два мальчика и с вероятностью 0,6 будут дежурить мальчик и девочка.

Понятно, что наглядное решение предыдущей задачи с помощью рисунка становится практически неосуществимым, когда количество точек на этом рисунке является большим числом. В таких задачах применяются формулы комбинаторики.

Пример 3. Среди 9 деталей, подвергаемых проверке, имеются 4 годных и 5 негодных. Найти вероятность того, что среди четырёх отобранных деталей будет равное число годных и негодных деталей.

Решение. В данном примере элементарным событием является конкретный набор из 4 деталей (выборка без возвращения из 9 элементов по 4). Общее число элементарных событий в Ω равно $n = C_9^4$, и элементарные события являются равновероятными. Выбрать две годные детали из четырёх можно C_4^2 способами, и при каждом конкретном выборе двух годных деталей две негодные детали из пяти можно выбрать C_5^2 способами. Таким образом, по принципу умножения $m = C_4^2 \cdot C_5^2$.

Таким образом, получим: $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_5^2}{C_9^4} = \frac{10}{21}$.

Ответ: $\frac{10}{21}$.

Другой подход к вычислению вероятности события основан на трактовке события как множества (подмножества пространства элементарных событий). Мы знаем, что над множествами можно выполнять операции – объединения, пересечения, дополнения. Этим операциям над множествами естественным образом соответствуют операции над событиями. Начнём с самой простой операции:

Событием, *противоположным* событию A , называется такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A .

Событие, противоположное событию A , обозначается $\bar{A}$. Для множеств соответствующей операцией является дополнение.

В рассмотренном в начале параграфа примере с бросанием игрального кубика пространством элементарных событий является множество $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Для событий $A = \{2; 4; 6\}$ (выпало чётное количество очков), $B = \{5; 6\}$ (выпало более 4 очков) и $C = \{1; 3; 4; 6\}$ противоположными будут события $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$ (выпало нечётное количество очков), $\bar{B} = \{1; 2; 3; 4\}$ (выпало не более 4 очков) и $\bar{C} = \{2; 5\}$.

В любом случайном эксперименте событием, противоположным невозможному, является достоверное событие и событием, противоположным достоверному, является невозможное: $\bar{\emptyset} = \Omega$ и $\bar{\Omega} = \emptyset$.

Понятно, что исход, благоприятный событию A , является неблагоприятным противоположному событию $\bar{A}$, и наоборот, исход, благоприятный событию $\bar{A}$, является неблагоприятным событию A . Отсюда следует, что $m_{\bar{A}} = n - m_A$, а значит:

$$P(\bar{A}) = \frac{m_{\bar{A}}}{n} = \frac{n - m_A}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m_A}{n} = 1 - \frac{m_A}{n} = 1 - P(A)$$

Принято такое определение суммы событий:

Суммой двух событий называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из этих событий.

Сумма событий A и B – это такое событие, которое произойдёт, если произошло событие A , или событие B , или оба эти события. Мы видим, что при трактовке событий как множеств эта операция над событиями соответствует объединению множеств A и B .

Сумма событий A и B обозначается $A + B$ или $A \cup B$.

Аналогично можно определить сумму трёх, четырёх и большего количества событий.

События можно также перемножить:

Произведением двух событий называется событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходят оба эти события.

Произведение событий A и B – это такое событие, которое произойдёт, если произошло и событие A , и событие B . Мы видим, что при трактовке событий как множеств эта операция над событиями соответствует пересечению множеств A и B .

Произведение событий A и B обозначается AB или $A \cap B$.

Аналогично можно определить произведение трёх, четырёх и большего количества событий.

Вернёмся ещё раз к рассмотренному в начале параграфа примеру с бросанием игрального кубика, в котором пространством элементарных событий является множество $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, и где мы обсуждали события $A = \{2; 4; 6\}$ (выпало чётное количество очков), $B = \{5; 6\}$ (выпало более 4 очков) и $C = \{1; 3; 4; 6\}$.

Найдём попарные суммы и произведения этих событий:

$$A+B = \{1; 4; 5; 6\}; \quad A+C = \{1; 2; 3; 4; 6\}; \quad B+C = \{1; 3; 4; 5; 6\};$$

$$AB = \{6\}; \quad AC = \{4; 6\}; \quad BC = \{6\}.$$

Найдём также сумму и произведение всех трёх событий:

$$A+B+C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega; \quad ABC = \{6\}.$$

Для рассмотренных выше трёх операций с событиями имеют место многочисленные формулы. Мы перечислим лишь некоторые из них.

- 1) $A + \bar{A} = \Omega$ (сумма противоположных событий – достоверное событие);
- 2) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$ (произведение противоположных событий – невозможное событие);
- 3) $A + A = A$;
- 4) $A \cdot A = A$;
- 5) $(A+B)C = AC + BC$.

Введём ещё одно важное определение:

Два события, которые не могут произойти одновременно, называются *несовместными*.

Тот факт, что события не могут произойти одновременно, по-другому можно выразить так: произведение этих событий есть невозможное событие. Таким образом:

$$\text{События } A \text{ и } B \text{ несовместны} \Leftrightarrow AB = \emptyset.$$

Основной вопрос, которым обычно задаются после определения операций над событиями, следующий. Предположим, мы знаем вероятности некоторых событий и знаем формулу, с помощью которой через них выражается интересующее нас событие. Как в этой ситуации найти вероятность интересующего нас события?

В такой общей постановке это трудный вопрос, мы попробуем дать ответ на него только в самых простых ситуациях. Скажем, для начала научимся находить вероятность суммы двух событий.

Начнём с ситуации, когда события несовместны.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Это можно выразить с помощью формулы:

Если события A и B несовместны, т.е. $AB = \emptyset$, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для доказательства предположим, что пространство элементарных событий состоит из n исходов случайного эксперимента, из которых событию A благоприятны m_A исходов и событию B – m_B исходов. Поскольку события несовместны, то нет таких исходов, которые были бы одновременно благоприятны и событию A , и событию B . А это значит, что количество исходов, благоприятных событию $A+B$, равно $m_{A+B} = m_A + m_B$. Отсюда получаем:

$$P(A+B) = \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать формулу для нахождения вероятности суммы n попарно несовместных событий:

Если события $A_1; A_2; \dots; A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Если же события являются совместными, то формулы для вероятности их суммы резко усложняются. Только в случае двух совместных событий формула имеет более-менее компактный вид:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Кстати, понятно, что выведенная выше формула для несовместных событий является частным случаем этой формулы: ведь в случае несовместности A и B будет $AB = \emptyset$ и тогда $P(AB) = P(\emptyset) = 0$.

Но уже в случае трёх событий (не говоря о большем количестве) формула для вероятности суммы становится настолько громоздкой, что ею пользуются редко:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Пример 4. В непрозрачном ящике лежат карточки, на которых написаны числа 1; 2; 3; 4 и 5, причём карточек с любым числом имеет по три штуки: одна синяя, одна красная и одна зелёная. Наугад вынимается одна карточка. Найдите вероятность того, что она или с чётным числом, или зелёная.

Решение. Пусть событие A – вынута карточка с чётным числом, а событие B – вынута зелёная карточка. Нам нужно найти вероятность события $A+B$. Т.к. общее количество карточек в ящике равно 15, то $n = 15$. Т.к. карточек с чётным числом в ящике 6, то $m_A = 6$ и $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. Зелёных карточек в ящике 5, поэтому

$m_B = 5$ и $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Наконец, зелёных карточек, на которых написано чётное число, две (одна с числом 2 и одна с числом 4), т.е. $m_{AB} = 2$ и $P(AB) = \frac{m_{AB}}{n} = \frac{2}{15}$. Теперь по формуле для вероятности суммы совместных событий находим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

В заключение параграфа обсудим, как находится вероятность произведения двух событий. Для этого нам понадобится понятие условной вероятности.

Вероятность события A при условии, что произошло событие B , называется *условной вероятностью* и обозначается $P(A/B)$ или $P_B(A)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в ящике имеется 5 белых и 7 черных шаров. Из ящика по очереди вынимают два шара (без возвращения). Рассмотрим события A_1 – первый вынутый шар белый, A_2 – второй вынутый шар белый.

Если событие A_1 произошло, т.е. первый вынутый шар был белым, то в ящике осталось 11 шаров: 4 белых и 7 чёрных, и тогда вероятность вынуть белый шар легко вычисляется с использованием классической модели. Она равна $\frac{4}{11}$. Но в наших

обозначениях это и значит, что $P(A_2/A_1) = \frac{4}{11}$. Аналогично вычисляется условная

вероятность $P(A_2/\overline{A_1}) = \frac{5}{11}$.

События A и B называются *независимыми*, если условная вероятность одного из них при условии, что второе произошло, такая же, как и при условии, что второе не произошло (а, значит, и без всяких условий относительно второго события):

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A).$$

Заметим, что для проверки независимости событий A и B достаточно проверить в последней формуле одно из равенств.

Скажем, события A_1 и A_2 в рассматриваемом примере зависимые, т.к. $P(A_2/A_1) \neq P(A_2/\overline{A_1})$.

При вычислении вероятности произведения событий прежде всего нужно выяснить, зависимые события или нет. Если события независимые, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей всех отдельных событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \text{ если } A \text{ и } B \text{ независимы,}$$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C), \text{ если } A, B \text{ и } C \text{ – независимы, и т.д.}$$

Если же события зависимые, то вероятность произведения вычисляется по более сложным формулам, в которые входят условные вероятности:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A);$$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB);$$

и т.д. (каждый следующий множитель есть условная вероятность следующего события при условии, что произошли все предыдущие).

Пример 5. В условиях рассмотренного выше примера вычислите вероятность события $A_1 A_2$ (оба вынутых шара белые).

Решение:

Как было установлено, события A_1 и A_2 – зависимые, следовательно:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}.$$

Ответ: $\frac{5}{33}$.

Пример 6. Для трёх стрелков известны вероятности поражения мишени каждым: 0,5 – для первого, 0,8 – для второго и 0,6 – для третьего. Все три одновременно стреляют по одной и той же мишени *. Найти вероятности следующих событий:

A – произошло три попадания в мишень;

B – произошло два попадания в мишень.

Решение. Пусть событие $S_i, i=1,2,3$ – i -й стрелок попал в мишень, тогда, соответственно, $\bar{S}_i$ – i -й стрелок промахнулся.

По условию: $P(S_1) = 0,5$, $P(S_2) = 0,8$, $P(S_3) = 0,7$, откуда:

$$P(\bar{S}_1) = 1 - P(S_1) = 0,5, \quad P(\bar{S}_2) = 1 - P(S_2) = 0,2, \quad P(\bar{S}_3) = 1 - P(S_3) = 0,4.$$

Интересующие нас события выражаются через S_1, S_2 и S_3 следующим образом:

$$A = S_1 S_2 S_3;$$

$$B = S_1 S_2 \bar{S}_3 + S_1 \bar{S}_2 S_3 + \bar{S}_1 S_2 S_3.$$

Ясно также, что события S_1, S_2 и S_3 независимые, поэтому:

$$P(A) = P(S_1 S_2 S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,28.$$

При вычислении вероятности события B заметим, что все три слагаемые несовместны (например, события $S_1 S_2 \bar{S}_3$ и $S_1 \bar{S}_2 S_3$ несовместны потому, что первое из них предполагает, что S_2 произошло, а второе, что S_2 не произошло – ясно, что одновременно этого быть не может). Таким образом:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(S_1 S_2 \bar{S}_3 + S_1 \bar{S}_2 S_3 + \bar{S}_1 S_2 S_3) = P(S_1 S_2 \bar{S}_3) + P(S_1 \bar{S}_2 S_3) + P(\bar{S}_1 S_2 S_3) = \\ &= P(S_1)P(S_2)P(\bar{S}_3) + P(S_1)P(\bar{S}_2)P(S_3) + P(\bar{S}_1)P(S_2)P(S_3) = \end{aligned}$$

* Мишень неподвижно закреплена и при попадании в неё остаётся на месте.

$$= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,16 + 0,06 + 0,24 = 0,46.$$

Ответ: $P(A) = 0,24$; $P(B) = 0,46$.

Н

1 Ответьте на вопросы, приводя примеры.

- а) Что называется случайным экспериментом?
- б) Что называется исходом случайного эксперимента?
- в) Что называется элементарным событием?
- г) Что называется случайным событием?

2 а) Какое событие называется невозможным?

б) Какое событие называется достоверным?

3 а) Какие исходы случайного эксперимента называются благоприятными данному случайному событию?

б) Какие исходы случайного эксперимента благоприятны невозможному событию?

в) Какие исходы случайного эксперимента благоприятны достоверному событию?

4 а) Какое событие называется противоположным данному событию A ?

б) Какое событие противоположно невозможному событию?

в) Какое событие противоположно достоверному событию?

5 Ответьте на вопросы, приводя примеры.

а) Что называется суммой двух событий?

б) Что называется произведением двух событий?

6 Ответьте на вопросы, приводя примеры.

а) Какие события называются несовместными?

б) Как найти вероятность суммы несовместных событий?

в) Как найти вероятность суммы двух произвольных событий?

7 Ответьте на вопросы, приводя примеры.

а) Что называется условной вероятностью?

б) Какие события называются независимыми?

в) Какие события называются зависимыми?

г) Как найти вероятность произведения независимых событий?

д) Как найти вероятность произведения зависимых событий?

8 Правильная монета бросается один раз. Опишите пространство элементарных событий. Сколько элементов оно содержит? Равновозможны ли элементарные события?

9 Какова вероятность того, что при бросании шестигранного кубика выпадет число очков, делящееся на 3?

10 Из тщательно перемешанных костей домино наудачу берётся одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней будет: а) равна четырём; б) равна шести; в) равна двенадцати; г) равна тринадцати; д) не менее девяти?

11 В лотерее 1000 билетов, из них на один билет выпадает выигрыш в 500 рублей, на десять билетов – по 100 рублей, на пятьдесят билетов – по 20 рублей, на сто билетов – по 5 рублей. Найдите вероятность выигрыша не менее 20 рублей при покупке одного билета.

12 Найдите вероятность того, что выбранное наудачу однозначное целое положительное число при возведении в квадрат дает число: а) оканчивающееся единицей; б) чётное; в) нечётное.

13 Найдите вероятность того, что в наудачу выбранном пятизначном телефонном номере: а) все цифры окажутся различными; б) первая и последняя цифры будут 3; в) не содержится цифра 0; г) содержатся только нечётные цифры.

14 При включении зажигания двигатель начнёт работать с вероятностью 0,6. Найдите вероятность того, что:

- а) двигатель начнёт работать при третьем включении зажигания;
- б) для запуска двигателя придётся включать зажигание не более трёх раз.

П

15 Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,15. Какова вероятность того, что: а) из двух купленных билетов выигрыш выпадет на один из них? б) из трёх купленных билетов выигрыш выпадет на два из них? в) по крайней мере на один из четырёх купленных билетов выпадет выигрыш?

16 На книжной полке имеется 10 книг по химии, 7 книг по физике и 5 книг по математике. Найдите вероятность того, что среди наудачу выбранных 9 книг количество книг по химии, физике и математике будет одинаковое.

17 В поход пошли 10 школьников. Среди них 7 юношей и 3 девушки. Для дежурства надо выделить трёх школьников. Найдите вероятность того, что это будут: а) трое юношей; б) две девушки и один юноша.

18 В хоккейном турнире участвуют 8 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 4 команды в каждой. Среди участников соревнования имеются 4 команды экстра-класса. Найдите вероятность того, что:

- а) все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу;
- б) по две команды экстра-класса попадут в каждую из групп.

19 Ящик содержит 40 годных и 10 бракованных деталей. Найдите вероятность событий:

$A = \{\text{среди 10 вынутых из ящика деталей нет бракованных}\};$

$B = \{\text{среди 11 вынутых из ящика деталей все бракованные}\};$

$C = \{\text{среди 8 вынутых из ящика деталей 6 годных и 2 бракованные}\};$

$D = \{\text{хотя бы одна из 10 взятых деталей годная}\}.$

20 Школьник знает 20 из 25 вопросов. Найдите вероятность того, что школьник:

а) знает предложенные ему учителем 3 вопроса;

б) знает хотя бы один из трёх предложенных ему вопросов;

в) знает только один из трёх предложенных ему вопросов.

21 Группа из 20 мальчиков и 20 девочек делится на 2 равные части. Найдите вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково.

22 а) Две различные правильные монеты бросаются один раз одновременно. Опишите пространство элементарных событий. Сколько элементов оно содержит? Равновозможны ли элементарные события?

б) Решите предыдущую задачу для случая, когда монеты одинаковые. Изменятся ли ответы на поставленные вопросы?

23 Докажите формулу для вероятности суммы двух событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

24 а) Докажите, что $(A+B)C = AC + BC$ для любых событий A, B и C .

б) Докажите, что $AB+C = (A+C)(B+C)$ для любых событий A, B и C (эта формула получена из формулы предыдущего пункта заменой знаков сложения на знаки умножения и наоборот – знаков умножения на знаки сложения).

М

25 Докажите формулу для вероятности суммы трёх событий:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

26 а) Докажите, что для любых двух событий A и B имеют место соотношения:

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \text{и} \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

(эти формулы называются правилами де Моргана для двух событий)

б) Докажите правила де Моргана для n событий:

$$\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n} \quad \text{и} \quad \overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \dots + \overline{A_n}.$$

ГЛАВА V*

Комплексные числа

5.1. Основные определения. Сложение и умножение комплексных чисел

В самом начале XVI века итальянские математики (Сципион дель Ферро, Николо Тарталья, Джироламо Кардано) научились решать кубические уравнения.

Ими была найдена формула, выражающая корень кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ через коэффициенты p и q .

Приводим полученную ими формулу в современных обозначениях:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Довольно быстро было обнаружено, что в случае, когда кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три действительных корня, эта формула приводит к необходимости извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

В этом легко убедиться, если попытаться применить формулу Кардано к кубическому уравнению $x^3 - x = 0$, корни которого равны ± 1 и 0 .

С этого фактически и началась история комплексных чисел.

Комплексными числами будем называть выражения вида $a + bi$, где a и b – некоторые действительные числа.

Сложение и умножение комплексных чисел определены следующим образом:

1. Суммой комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ называют комплексное число $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

2. Произведением комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ называют комплексное число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Выражение $a + bi$ называют также *алгебраической формой записи комплексного числа*, при этом a называют действительной частью комплексного числа $z = a + bi$, а число b – мнимой частью. Символ i принято называть *мнимой единицей*.

Обозначения:

$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(a + bi) = a$ – действительная часть z ,

$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(a + bi) = b$ – мнимая часть числа z .

Запись $a + bi$ называют *алгебраической формой записи комплексного числа*. Существуют и другие формы записи.

Пример 1. Найдём действительную и мнимую часть числа $3 + 4i$.

1) Действительная часть: $\operatorname{Re}(3 + 4i) = 3$,

2) Мнимая часть: $\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4$.

Пример 2. Найдём сумму и произведение чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 - 2i$.

1) $z_1 + z_2 = (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + (2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1)i = 8 - i$.

Ответ: $z_1 + z_2 = 3 + i$, $z_1 \cdot z_2 = 8 - i$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны, если равны их действительные и мнимые части: $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ и $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$

Сложение и умножение комплексных чисел обладают теми же свойствами, что сложение и умножение действительных чисел.

1. Переместительное свойство сложения:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \text{ (коммутативность сложения).}$$

2. Сочетательное свойство сложения:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \text{ (ассоциативность сложения).}$$

3. Переместительное свойство умножения:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \text{ (коммутативность умножения).}$$

4. Сочетательное свойство умножения:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \text{ (ассоциативность умножения).}$$

5. Распределительное свойство умножения относительно сложения:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \text{ (дистрибутивность сложения).}$$

Докажем переместительное свойство сложения.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

По определению операции сложения для комплексных чисел можно записать:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \text{ и } z_2 + z_1 = (c + a) + (d + b)i. \text{ Но } a + c = c + a, b + d = d + b.$$

Получается, что у чисел $z_1 + z_2$ и $z_2 + z_1$ действительные и мнимые части равны. Следовательно, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, что и требовалось доказать.

Докажем распределительное свойство умножения относительно сложения.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) = \\ &= (a + bi) \cdot ((c + e) + (d + f)i) = (a(c + e) - b(d + f)) + (a(d + f) + b(c + e))i. \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) = \\ &= ((ac - bd) + (ae - bf)) + ((ad + bc) + (af + be))i. \end{aligned}$$

Убедимся, что комплексные числа $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$ и $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ равны.

Сравним действительные и мнимые части.

Действительные части равны: $a(c + e) - b(d + f) = (ac - bd) + (ae - bf)$.

Мнимые части равны: $a(d + f) + b(c + e) = (ad + bc) + (af + be)$.

Следовательно, комплексные числа $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$ и $z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ равны.

Остальные свойства сложения и умножения доказывают аналогично.

Множество комплексных чисел принято обозначать буквой C .

Как соотносятся между собой действительные и комплексные числа?

Принято отождествлять действительное число a и комплексное число $a + 0 \cdot i$.

Это возможно потому, что операции сложения и умножения над теми и другими числами полностью согласованы и приводят к тождественным результатам.

Точнее, если некоторые действительные числа a и b сложить или умножить, в результате получив некоторое действительное число d , а затем ту же самую операцию провести с комплексными числами $a + 0 \cdot i$ и $b + 0 \cdot i$, то в результате получится число $d + 0 \cdot i$.

Обоснования этого утверждения представлены в таблице.

Комплексные числа вида $a + 0 \cdot i$	Действительные числа
$z_1 + z_2 = (a + c) + (0 + 0)i = (a + c) + 0 \cdot i$	$a + c$
$z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - 0 \cdot 0) + (a \cdot 0 + 0 \cdot c)i = a \cdot c + 0 \cdot i$	$a \cdot c$

Таким образом, множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

В дальнейшем мы будем всегда писать a , подразумевая, комплексное число $a + 0 \cdot i$. В частности, число $0 + 0 \cdot i$ мы будем записывать просто 0 и, как и раньше называть нулём, а число $1 + 0 \cdot i = 1$ будем называть единицей.

Числа вида $0 + bi$ принято называть мнимыми и кратко записывать их как bi . Проверьте, что если сложить два мнимых числа, то получится мнимое число. А вот если перемножить два мнимых числа, то получится действительное число. Говорят,

что множество мнимых чисел замкнуто относительно сложения, но не замкнуто относительно умножения.

Пример 3. Найдите квадрат числа i (мнимой единицы):

$$i^2 = (0+1 \cdot i)(0+1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (1 \cdot 0 + 0 \cdot 1)i = -1 + 0 \cdot i.$$

Получили результат, который не раз будем использовать в дальнейшем: $i^2 = -1$.

Действительное число – комплексное число, мнимая часть которого равна нулю.
Мнимое число – комплексное число, действительная часть которого равна нулю.

При сложении и умножении комплексных чисел 0 и 1 выполняют ту же роль, что и при сложении и умножении действительных чисел.

А именно:

Для любого комплексного числа z :
1) $z + 0 = 0 + z = z$; 2) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$; 3) $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$.

И ещё одно важное утверждение:

Комплексные числа можно складывать и умножать так же, как алгебраические выражения вида $a+bi$, заменяя при вычислениях i^2 на -1 .

Для сложения это очевидно; посмотрим как для умножения.

Пусть $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$.

По определению: $z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$.

С другой стороны:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac - bd + bci + adi = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Пример 4. Вычислим: $(2+i)(3-i)$.

Раскроем скобки и приведём подобные:

$$(2+i)(3-i) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot i + i \cdot 3 - i^2 = 7 + i.$$

Ответ: $7+i$.

Именно такой результат получится, если выполнить умножение комплексных чисел $2+i$ и $3-i$ по определению.

Полученный результат мы в дальнейшем обобщим на вычитание и деление.

Мы не раз убедимся, что производить арифметические действия с комплексными числами как с алгебраическими выражениями значительно удобнее, чем пользуясь формулами 1 и 2 на стр. 191. Это, например, позволит нам записывать число $2+(-3)i$ как $2-3i$, чем мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Что называют комплексным числом?

б) Как определяют сложение и умножение комплексных чисел?

2 Выполните сложение комплексных чисел.

а) $2 - 3i$ и $3 - 2i$;

в) $1 + 9i$ и $7 - 9i$;

б) $6 + 4i$ и $1 + i$;

г) $4 + i$ и $1 + i$.

3 Выполните умножение.

а) $(2 - 3i) \cdot (3 - 2i)$;

в) $(2 + 3i) \cdot (6 - 5i)$;

б) $(6 - 4i) \cdot (1 + i)$;

г) $(2 - i) \cdot (4 - 2i)$.

4 Установите, при каких действительных x и y верно равенство.

а) $y + (y - 3)i = (x - 6) - 2i$;

в) $(1 + i) \cdot x + (1 - i)y = 3 - i$;

б) $3y + 2(y + 5)i = (x - 6) + 10i$;

г) $(1 + 2i) \cdot x - (5 + i)y = 6 + 3i$.

5 Найдите действительные значения x , если известно, что z действительное число.

а) $z = (x + 2) + (x^2 - 4x)i$;

в) $z = 6 + (x^2 - 4x + 3)i$;

б) $z = 2x + (1 - x^2)i$;

г) $z = x^2 + (1 + \sqrt{x})i$.

6 Найдите действительные значения x , если известно, что z мнимое число.

а) $z = (4x - 2) + (x + 3)i$;

в) $z = (2 - x^2) + (x^2 + 3)i$

б) $z = (2x^2 + 1) + 6i$;

г) $z = 4x - x^3 + \frac{3+x}{x-2}i$

П

7 Вычислите

а) $(1 + i)(1 + 2i)(1 + 3i)$;

б) $(1 + i)(1 + i^2)(1 + i^3)$

8 Вычислите

а) $(1 - i)^3$;

в) $(1 + i)^5$;

б) $(1 + i)^4$;

г) $(1 - i)^6$.

9 При каких действительных значениях x мнимые и действительные части данных чисел равны?

а) $z = (2-x) + (5x-7)i$;

б) $z = (2+x) + (2x^2-4)i$.

10 Найдите значение выражения:

а) $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = i$;

б) $x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = 1+i$.

М

11 Найдите действительные значения x .

а) $\operatorname{Re}((1-2xi)^2 + 3) = 0$;

б) $\operatorname{Im}((x+2i)^2 + 2xi) = 6$.

12 Найдите комплексное число z из уравнения.

а) $(1+i) \cdot z = -4 + 6i$;

б) $(3-4i) \cdot z = 3 + 4i$

13 Вычислите.

а) $i + i^2 + \dots + i^{2007}$;

б) $i + i^2 + \dots + i^n$.

14 Вычислите.

а) $i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{2007}$;

б) $i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^n$.

15 Найдите наименьшее натуральное n , при котором данное числовое выражение окажется положительным действительным числом.

а) $(1+i)^n$;

б) $(1-i)^n$.

16 Докажите равенства, где $k \in \mathbb{N}$.

а) $i^{4k} = 1$;

в) $i^{4k+2} = -1$;

б) $i^{4k+1} = i$;

г) $i^{4k+3} = -i$.

5.2. Вычитание и деление комплексных чисел

Вычитание и деление комплексных чисел определяют как операции обратные соответственно сложению и умножению.

Комплексное число z будем называть *разностью* двух комплексных чисел z_1 и z_2 тогда и только тогда, когда верно равенство: $z_1 = z_2 + z$

Пример 1. Проверим, что разность комплексных чисел $4-6i$ и $1+i$ равна $3-7i$.
Для этого достаточно проверить, что $4-6i = (1+i) + (3-7i)$.

То есть, $4-6i = (1+3) + (1+(-7))i$. Равенство верно.

Научимся выполнять вычитание в общем виде.

Предположим, $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, а $z = x+yi$ – их разность.

Запишем равенство $z_1 = z_2 + z$ подробнее:

$$a+bi = (c+di) + (x+yi), \text{ откуда } a+bi = (c+x) + (d+y)i.$$

Получим: $a = c+x$ и $b = d+y$.

Из полученных уравнений x и y определяются единственным образом:
 $x = a-c$ и $y = b-d$, так как a, b, c, d – действительные числа, а для действительных чисел, как мы знаем, операция вычитания определена всегда.

Мы доказали, что:

Разность комплексных чисел $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ равна комплексному числу
 $z = (a-c) + (b-d)i$.

Пример 2. Вычислим разность: $(5+6i) - (3+7i)$.

Получим: $(5+6i) - (3+7i) = (5-3) + (6-7)i = 2-i$.

Ответ: $2-i$.

Комплексные числа z_1 и z_2 называются противоположными, если $z_1 + z_2 = 0$.

Пусть $z_1 = a+bi$ и $z_2 = c+di$.

Тогда условие $z_1 + z_2 = 0$ равносильно следующему:

$$z_1 + z_2 = (a+b) + (c+d)i = 0, \text{ } a+b=0 \text{ и } c+d=0.$$

Получили, что два комплексных числа противоположны тогда и только тогда, когда противоположны их действительные и мнимые части.

Последнее означает: чтобы из комплексного числа z_1 вычесть комплексное число z_2 , достаточно к числу z_1 прибавить число, противоположное числу z_2 .

Комплексное число z будем называть *частным* двух комплексных чисел z_1 и z_2 , где $z_2 \neq 0$, тогда и только тогда, когда верно равенство: $z_1 = z_2 \cdot z$.

Пример 3. Проверим, что частное комплексных чисел $4-6i$ и $1+i$ равно $-1-5i$.

Для этого достаточно проверить, что $4-6i = (1+i) \cdot (-1-5i)$.

Получаем: $4 - 6i = (1 + i) \cdot (-1 - 5i) = -1 - 5i^2 - i - 6i$. Равенство верно.

Выполним деление в общем виде.

Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, причём $z_2 \neq 0$.

Обозначим частное $z = x + yi$.

Запишем уравнение $z_1 = z_2 \cdot z$ подробнее:

$$a + bi = (c + di)(x + yi) = (cx - dy) + (cy + dx)i.$$

Получим систему уравнений: $a = cx - dy$ и $b = cy + dx$.

Решим её относительно x и y .

Для этого сначала умножим первое уравнение на c , а второе уравнение на d , полученные уравнения сложим, а затем умножим первое уравнение на d , а второе уравнение на $-c$, и полученные уравнения сложим.

Получим два уравнения:

$$\begin{cases} ac + bd = c^2x - cdy + cdy + d^2x, \\ ad - bc = cdx - d^2y - c^2y + cdx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac + bd = (c^2 + d^2)x, \\ bc - ad = (c^2 + d^2)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \\ y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \end{cases}$$

Операция деления выполнима так как $z_2 \neq 0$, а, значит, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Из полученных уравнений x и y определяются единственным образом, так как a, b, c, d — действительные числа, а для действительных чисел, как мы знаем, операции сложения, вычитания и умножения определены.

Мы доказали, что:

Частное комплексных чисел $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ равно комплексному числу

$$z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Пример 4. Выполним деление $9 - 7i$ на $2 - 3i$.

Вычисления по формуле:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{9 \cdot 2 + (-7) \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2} + \frac{-7 \cdot 2 - 9 \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2}i = \frac{39}{13} + \frac{13}{13}i.$$

Ответ: $3 + i$.

Два комплексных числа называют *сопряжёнными*, если их действительные части равны, а мнимые части противоположны.

Обозначения: $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ — пара сопряжённых комплексных чисел.

Попробуем делить комплексные числа $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ как алгебраические выражения. Для этого, умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac - bdi^2 + bci - adi}{c^2 + d^2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Получили тот же результат, что и при делении комплексных чисел по определению. Получается, чтобы выполнить деление, не обязательно запоминать формулу, она получится автоматически, если умножить числитель и знаменатель соответствующей дроби на число, сопряжённое знаменателю.

Пример 5. Выполните деление $9 - 7i$ на $2 - 3i$.

Решение. Получим:

$$\frac{9 - 7i}{2 - 3i} = \frac{(9 - 7i) \cdot (2 + 3i)}{(2 - 3i) \cdot (2 + 3i)} = \frac{39 + 13i}{13} = 3 + i.$$

Ответ: $3 + i$.

Вывод:

Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить так же, как алгебраические выражения вида $a + bi$, заменяя при вычислениях i^2 на -1 .

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как определяют вычитание и деление комплексных чисел?
- б) Какие комплексные числа называют противоположными? Какие – сопряжёнными?

2 Выполните вычитание.

- а) $(2 - 3i) - (3 - 2i)$; в) $(5 + 6i) - (3 + 7i)$;
- б) $(6 + 4i) - (1 + i)$; г) $(3 + 4i) - (3 - i)$.

3 Найдите такие комплексные числа z , при которых верно равенство

- а) $(2 - i) + z = 3 - 2i$; в) $(1 - i)z = -5 - 2i$;
- б) $(-3 + 2i) - z = 7 + 3i$; г) $(3 + 4i)z = 1 - 4i$.

4 Выполните деление.

- а) $(1 + i) : i$; в) $(2 + i) : (2 - i)$;
- б) $2i : (1 + i)$; г) $25 : (4 - 3i)$.

5 Вычислите.

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{i^2}$; в) $\frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^4}$; г) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$.

6 Выполните действия.

а) $\frac{1}{1+i} - \frac{1}{1-i}$; в) $\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$;
б) $\frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}$; г) $\frac{5+2i}{2-5i} + \frac{3-4i}{4+3i}$.

П

7 При каких действительных значениях x числа $(x-8)-6i$ и $(2x^2-2)+3xi$ противоположны?

8 Вычислите.

а) $\frac{(2-3i)(3+4i)}{1+2i}$; в) $\frac{1+2i}{(1+i)(1+3i)}$;
б) $\frac{(2+4i)(3+3i)}{6-4i}$; г) $\frac{3+2i}{(1-i)(2-i)}$.

9 Вычислите.

а) $\frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$; б) $\frac{(2-i)(1-2i)}{1-i} + \frac{(2+i)(1+i)}{1+2i}$.

М

10 Найдите такие комплексные z , при которых верно равенство.

а) $z+2\bar{z}=3-2i$; б) $z(2+i)=3-i$.

11 Существуют ли такие два комплексных числа (не являющихся действительными), не равные нулю, что являются действительными числами их:

а) сумма и произведение? б) сумма, произведение и частное?

12 Найдите при каких действительных значениях x и y выполнено равенство.

а) $\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i$; б) $\frac{x-i}{y+i} + \frac{y+i}{x-i} = 0$.

13 Вычислите

а) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \dots + \frac{1}{i^{2007}}$; б) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \dots + \frac{1}{i^n}$.

14 Докажите следующие свойства сопряжённых чисел:

а) Если $Z = z_1 + z_2$, то $\bar{Z} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; в) Если $Z = z_1 - z_2$, то $\bar{Z} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
б) Если $Z = z_1 \cdot z_2$, то $\bar{Z} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; г) Если $Z = \frac{z_1}{z_2}$, то $\bar{Z} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

15 Докажите, что $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

5.3. Квадратные корни из отрицательных чисел

В десятом классе мы изучали свойства многочленов с действительными коэффициентами, на которых основывается теория целых алгебраических уравнений.

Свойства действительных корней многочленов с действительными коэффициентами можно распространить на случай комплексных корней многочленов с действительными коэффициентами.

В частности, остаётся верной теорема Безу и следствия из неё.

В данном параграфе мы продолжим изучение целых алгебраических уравнений.

Исследуем вопрос о наличии комплексных корней у квадратных уравнений с действительными коэффициентами.

Как известно, наличие действительных корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$: если $D \geq 0$, то корнями квадратного уравнения являются действительные числа:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если же $D < 0$, то квадратное уравнение действительных корней не имеет.

Попробуем разобраться, будут ли в этом случае у квадратного уравнения комплексные корни. Для этого нам потребуется разобраться, что такое $\sqrt{D}$ в том случае, когда $D < 0$. Начнём с определения.

Квадратным корнем из комплексного числа a называется такое комплексное число b , что $a = b^2$.

Пример 1. Проверьте, что $2 + i$ является квадратным корнем из числа $3 + 4i$.

Решение. Достаточно убедиться, что $(2 + i)^2 = 3 + 4i$.

Раскроем скобки в выражении $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$.

Равенство верно.

Теперь исследуем квадратное уравнение вида $x^2 = a$, где $a < 0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что его корнями будут числа $x = \pm i\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{|a|}$, где $\sqrt{-a}$ – арифметический квадратный корень из положительного действительного числа $-a$. Ранее было доказано, что уравнение степени n не может иметь более n корней.

В нашем случае квадратное уравнение $x^2 = a$ уже имеет два корня $\pm i\sqrt{|a|}$, следовательно, других корней у него нет.

Поскольку, квадратный корень из числа a является корнем уравнения $x^2 = a$, то квадратными корнями из отрицательного числа a являются числа $\pm i\sqrt{|a|}$ и только они. Далее, подстановкой можно убедиться, что числа

$$\frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в случае $D < 0$.

Тем самым доказано, что квадратное уравнение не может иметь более двух корней. В то же время, доказано также, что известная вам из курса алгебры восьмого класса формула для корней квадратного уравнения позволяет находить корни квадратного уравнения и в случае $D < 0$. Правда, эти корни будут комплексными числами.

Пример 2. Решите квадратное уравнение:

$$x^2 - x + 2 = 0.$$

Решение. Найдём дискриминант: $D = -7$.

Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$.

1. Корни любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами можно вычислять по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Если дискриминант квадратного уравнения отрицателен ($D < 0$), то его корни можно вычислять по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a},$$

где $\sqrt{|D|}$ – арифметический квадратный корень из неотрицательного действительного числа.

Если корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ переписать в виде $\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a}$, то можно обратить внимание на следующее важный факт, который не раз нам понадобится в дальнейшем.

Корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются сопряжёнными комплексными числами.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Сколько значений может иметь квадратный корень из отрицательного числа?
- б) Сколько комплексных корней может иметь квадратное уравнение с действительными коэффициентами?

2 Решите уравнение

- а) $z^2 + 1 = 0$;
- б) $z^2 + 2 = 0$;
- в) $z^2 + 9 = 0$;
- г) $z^2 + 5 + \sqrt{3} = 0$.

3 Решите уравнение

- а) $z^2 - 2z + 2 = 0$;
- б) $z^2 + 4z + 7 = 0$;
- в) $2z^2 - z + 1 = 0$;
- г) $z^2 + z + 1 = 0$.

М

12 Докажите теорему Виета для квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

13 Решите уравнение.

а) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$;

б) $z^2 = (\bar{z} + 1)^2$.

14 Вычислите значение корня по определению.

а) $\sqrt{7 - 24i}$;

б) $\sqrt{5 - 12i}$

15 Найдите все такие комплексные числа z , что $z^2 = 5 + 12i$ и $\operatorname{Re}(z) < 0$.

5.4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

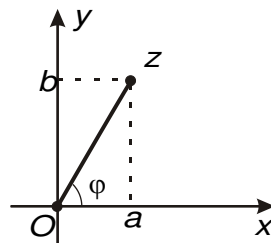
Известно, что каждому действительному числу можно сопоставить некоторую точку на числовой оси. Каждому комплексному числу $z = x + yi$ можно сопоставить точку на координатной плоскости с координатами $(x; y)$.

При этом каждому комплексному числу соответствует вполне определённая точка плоскости, а каждой точке плоскости – вполне определённое комплексное число. Указанную точку иногда называют *изображением* данного комплексного числа, комплексное число – *координатой точки на комплексной плоскости* (иногда просто – *комплексной координатой*).

Пример 1. Комплексное число $1 + i$ изображается на плоскости точкой с координатами $(1; 1)$, а комплексной координатой точки $A(-2; 3)$ будет комплексное число $-2 + 3i$.

Действительные числа $a + 0i$ на комплексной плоскости изображаются точками на оси абсцисс, поэтому ось абсцисс иногда называют *действительной осью*.

Мнимые числа изображаются точками, расположенными на оси ординат и поэтому ось ординат иногда называют *мнимой осью*.



Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называют расстояние от точки с координатами $(a; b)$ до начала координат.

Обозначение: $|z| = |a + bi|$.

Из теоремы Пифагора следует, что $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называют величину угла наклона радиус-вектора с координатами $(a; b)$ к оси абсцисс.

Обозначение: $\arg z = \arg(a + bi)$.

Из рисунка понятно, что действительную и мнимую части данного комплексного числа $z = a + bi$ можно выразить через его модуль и аргумент:

$$\operatorname{Re}(z) = a = |z| \cdot \cos \varphi, \quad \operatorname{Im}(z) = b = |z| \cdot \sin \varphi.$$

Иначе говоря, если $\arg z = \varphi$, то $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, а $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Пример 2. Найдём модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$.

1) Модуль: $|z| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

2) Аргумент найдём из следующих соображений:

$$\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{а} \quad \sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, аргументом $\arg z = \arg(2 + 2i)$ может служить число $\frac{\pi}{4}$.

Заметим, что аргумент комплексного числа ($\arg z$) определён неоднозначно, а с точностью до $2\pi n$, где n – произвольное целое число.

Именно, если φ – аргумент некоторого комплексного числа, то $\varphi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ – аргумент того же комплексного числа.

Если, например, угол наклона радиус-вектора, соответствующего некому числу z , равен $\frac{2\pi}{3}$, то соответствующий аргумент может быть выражен как $\frac{8\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$ и, вообще, любым числом вида $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Найдите комплексное число z , если $|z| = 4$, а $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$.

Решение. 1) Действительная часть z : $\operatorname{Re} z = a = 4 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

2) Мнимая часть z : $\operatorname{Im} z = a = 4 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Ответ: $2\sqrt{3} + 2i$.

Найдём модуль разности комплексных чисел $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$.

Получим $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$, что равно расстоянию между точками плоскости с координатами $(a; b)$ и $(c; d)$.

Получили следующий результат.

Модуль разности комплексных чисел z_1 и z_2 равен
расстоянию между точками z_1 и z_2 .

Уравнения и неравенства с одним неизвестным задают на плоскости множества точек. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. Постройте множество точек, заданное уравнением: $|z + i| = \sqrt{2}$.

Решение. Уравнение $|z - (-i)| = \sqrt{2}$ задаёт множество точек, удалённых от точки $-i$ на расстояние $\sqrt{2}$. Это окружность с центром в точке $-i$, т.е. точки с декартовыми координатами $(0; -1)$, и радиусом $\sqrt{2}$ (рис. 5.1).

Пример 6. Постройте множество точек, заданное неравенством: $|z + 1| \geq |z - 1|$.

Решение. Неравенство $|z - (-1)| \geq |z - 1|$ описывает множество точек, находящейся ближе к точке 1 , чем к точке -1 , то есть данное неравенство задаёт полуплоскость, расположенную правее оси ординат (рис. 5.2).

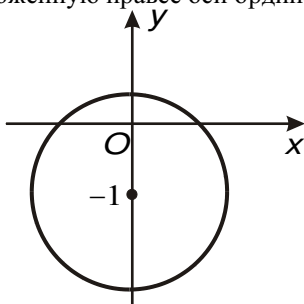


Рис. 5.1

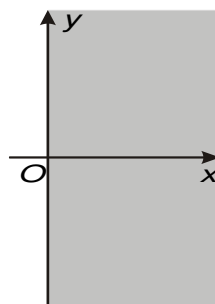


Рис. 5.2

Кроме представления комплексных чисел в виде точек комплексной плоскости возможно представление комплексных чисел в виде векторов.

Известно, что каждой точке плоскости соответствует вектор, начало которого расположено в начале координат, а конец – в точке, соответствующей данному

комплексному числу. Это означает, что каждому комплексному числу $z = x + yi$ можно однозначно сопоставить вектор с координатами $(x; y)$.

Представление комплексного числа вектором даёт простое геометрическое истолкование операции сложения комплексных чисел.

Пусть дано комплексное число $z_1 = a + bi$, которому соответствует радиус-вектор $\overline{(a; b)}$ и комплексное число $z_2 = c + di$, которому соответствует радиус-вектор $\overline{(c; d)}$.

Тогда сумме чисел $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ соответствует вектор $\overline{(a + c; b + d)}$.

Но вектор $\overline{(a + c; b + d)}$ является суммой векторов $\overline{(a; b)}$ и $\overline{(c; d)}$.

Аналогичный результат можно получить и для вычитания.

1. Вектор, соответствующий сумме комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих комплексным числам – слагаемым этой суммы.

2. Вектор, соответствующий разности комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих комплексным числам – уменьшаемому и вычитаемому.

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел проясним позднее.

Н

1 а) В чём смысл геометрической интерпретации комплексного числа?

б) Что называют модулем и аргументом комплексного числа?

2 Изобразите комплексные числа на координатной плоскости

а) $z_1 = 3 - 2i$;

в) $z_3 = 2 + 3i$;

б) $z_2 = 1 - i$;

г) $z_4 = -1 - i$.

3 Найдите модуль и аргумент комплексного числа

а) $1 - i$;

в) $2 + 3i$;

б) $-1 - i$;

г) $3 - 2i$.

4 Найдите комплексное число, если известны его модуль и аргумент.

а) $|z| = 2$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

в) $|z| = 1$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$;

б) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$;

г) $|z| = 3$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{2}$.

5 Укажите комплексные координаты точек, расположенных симметрично данным точкам относительно действительной и мнимой осей.

- а) $2+i$; б) $-7-i$; в) $3+2i$; г) $1-2i$.

6 Опишите множество точек плоскости, комплексные координаты которых удовлетворяют условиям:

- а) $\operatorname{Re}(z)=1$; б) $\operatorname{Im}(z)=1$; в) $\operatorname{Re}(z)=\operatorname{Im}(z)$; г) $\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)=0$.

7 Опишите множество точек плоскости, комплексные координаты которых удовлетворяют условиям:

- а) $\arg(z)=0$; б) $\arg(z)=\pi$; в) $|z|=0$; г) $|z|=1$.

П

8 Докажите неравенства, используя геометрическую интерпретацию комплексных чисел:

- а) $|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$; б) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$.

9 Как расположены на комплексной плоскости.

- а) точки, соответствующие противоположным числам?
б) точки, соответствующие сопряженным числам?

10 Изобразите на чертеже множество точек комплексной плоскости, заданных условием:

- а) $|z+2|=2$; в) $3\leq|z+i|\leq 5$;
б) $|z-i|=3$; г) $|z-2|=|z+i|$.

11 Изобразите на чертеже множество точек комплексной плоскости, заданных неравенством:

- а) $\operatorname{Re} z > 1$; в) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$;
б) $\operatorname{Im} z \leq 3$; г) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq 1$.

12 Найдите комплексное число z , соответствующее середине отрезка, соединяющего точки с комплексными координатами z_1 и z_2 .

- а) $z_1=5-3i$ и $z_2=1+i$; б) $z_1=-4i$ и $z_2=4-2i$.

13 Комплексные координаты точек плоскости: $z_1=1+i$, $z_2=-3-2i$ и $z_3=-1+2i$. Найдите комплексные координаты точек, которые дополняют данный треугольник до параллелограмма.

М

14 Опишите множество точек комплексной плоскости, заданных уравнением.

а) $\left| \frac{z-4}{z-2} \right| = 1;$

б) $\left| \frac{z+i}{z-3i} \right| = 1.$

15 На плоскости даны точки с комплексными координатами z_1 , z_2 и z_3 . Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках.

16 Установите, сколько решений имеет система уравнений.

а) $\begin{cases} |z+1-i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} |z-1-2i| = 1, \\ |z-1| = 1 \end{cases}$

17 Докажите тождество $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$. Каков геометрический смысл этого тождества?

5.5. Тригонометрическая форма комплексного числа

Как мы выяснили, координаты точки, изображающей данное комплексное число $z = a + bi$, можно выразить через его модуль и аргумент:

$$a = r \cdot \cos \varphi, \quad b = r \cdot \sin \varphi.$$

Это означает, что всякое комплексное число может быть представлено в виде:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа z .

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической формой*.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа:

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа.

Пример 1. Запишите в тригонометрической форме число $z = -1 - i$.

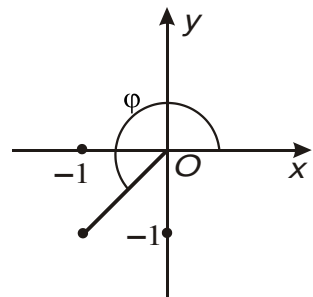
Посмотрим на геометрическую интерпретацию.

1) Найдём модуль z :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

2) Найдём аргумент z – величину угла φ .

Координаты точки z равны $(-1; -1)$.



Следовательно, $\cos \varphi = \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.

Посмотрим, как происходит умножение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, в общем виде.

Рассмотрим два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Перемножим z_1 и z_2 :

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Установлено, что если комплексное число $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ умножить на комплексное число $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то в произведении получится такое комплексное число $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, что $r = r_1 \cdot r_2$, а $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Иначе говоря:

При умножении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:
1. Модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей множителей
2. Аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов множителей.

Получается, что умножать комплексные числа удобнее, если они заданы в тригонометрической форме.

Пример 2. Выполните умножение комплексных чисел:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \text{ и } z_2 = \sqrt{8} \left(\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right).$$

Решение. Получим:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \sqrt{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} \right) \right) = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = -4.$$

Ответ: -4 .

Посмотрим, как происходит деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

Пусть:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Разделим z_1 на z_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}.$$

Умножим числитель и знаменатель второй дроби в правой части на комплексное число, сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)};$$

Знаменатель дроби в правой части:

$$(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1)i) = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

То есть, если комплексное число $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ разделить на комплексное число $z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то в частном получится комплексное число $z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, такое что $r = \frac{r_1}{r_2}$, а $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Иначе говоря:

При делении комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

1. Модуль частного комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя.
2. Аргумент частного комплексных чисел равен разности аргументов делимого и делителя.

Пример 4. Выполните деление комплексных чисел:

$$z_1 = \sqrt{12} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \text{ и } z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Решение. Получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i.$$

Ответ: 2i.

6 Опишите множество точек на плоскости, заданных уравнением в тригонометрической форме.

а) $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$; б) $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, если $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

7 Выполните умножение комплексных чисел z_1 и z_2 . Ответ запишите в тригонометрической форме.

а) $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$; в) $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$;
б) $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$; г) $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$;

8 Запишите комплексное число z в тригонометрической форме.

а) $z = 3 + i$; в) $z = 2 - i$;
б) $z = -1 + 2i$; г) $z = -5 - 4i$.

М

9 Запишите комплексное число z в тригонометрической форме.

а) $z = 1 - \cos 9 - i \sin 9$; б) $z = 1 - \cos 13 + i \sin 13$.

10 Запишите комплексное число z в тригонометрической форме.

а) $z = \sin \alpha - i \cos \alpha$; б) $z = -\cos \alpha + i \sin \alpha$.

11 Докажите, что $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

5.6. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел

Из формулы умножения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, следует, что если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

1. Модуль степени данного комплексного числа равен степени модуля данного числа.
2. Аргумент степени данного комплексного числа равен аргументу данного числа, умноженному на показатель степени.

Пример 1. Вычислите: $z = (1 + i)^{10}$.

Решение. Запишем число $1 + i$ в тригонометрической форме.

Получим: $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$

$$z = (\sqrt{2})^{10} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10} = 32 \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) = 32 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i.$$

Ответ: $32i$.

Важный частный случай формулы степени называют формулой Муавра, в честь известного французского математика, почти всю свою жизнь жившего в Англии, – Абрахама де Муавра (1667–1754).

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Формула имеет многочисленные и важные применения. Так, с её помощью можно получать многие тригонометрические формулы.

Пример 2. Раскройте скобки в выражении:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Решение. Раскроем скобки в левой части равенства:

$$\begin{aligned} \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi - i\sin^3\varphi &= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi, \\ (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi) + (3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi)i &= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Приравниваем действительные и мнимые части левой и правой части.

Получим:

$$1) \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi;$$

$$2) \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Мы получили формулы: $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, известные из курса алгебры и начал математического анализа 10-го класса.

Как мы уже хорошо знаем, с операцией возведения в степень тесно связана операция извлечения корня.

Корнем n -ой степени из комплексного числа z называют такое комплексное число a , которое в n -ой степени даёт z .

По исторически сложившейся традиции (в отличие от корней из действительных чисел!), все корни n -ой степени из комплексного числа z обозначаются одним и тем же символом $\sqrt[n]{z}$, но при этом подразумевается, что этот символ многозначен, т.е. ему могут соответствовать несколько различных комплексных чисел. При внимательном обращении с символом $\sqrt[n]{z}$ недоразумений не возникает. Нужно к этому привыкнуть.

Таким образом, с учётом сказанного выше:

$$\sqrt[n]{z} = a \text{ тогда и только тогда, когда } z = a^n.$$

Пример 3. Найдите $\sqrt{-1}$.

Решение. Нам уже известно, что $i^2 = -1$. Следовательно, $\sqrt{-1} = i$.

С другой стороны, $(-i)^2 = i^2 = -1$. Это означает, что $\sqrt{-1} = -i$.

Таким образом, мы убедились, что $\sqrt{-1}$ имеет как минимум два значения, а именно: i и $-i$.

Позднее мы докажем следующее важное утверждение:

Для каждого комплексного числа, отличного от нуля, существует ровно n различных значений корня n -ой степени из этого числа.

Но вначале найдём $\sqrt[n]{1}$. Заметим, что $|\sqrt[n]{1}| = 1$.

Пусть $\sqrt[n]{1} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, тогда:

$$1 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n, \quad 1 = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Следовательно, $\cos n\varphi = 1$, $\sin n\varphi = 0$, откуда $n\varphi = 2\pi k$, $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Получим:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Если в полученной формуле числу k придать натуральные значения от 0 до $n-1$, то получится n различных значений $\sqrt[n]{1}$, если же взять $k = n$, то полученное значение $\sqrt[n]{1}$ совпадёт со значением $\sqrt[n]{1}$ при $k = 0$:

$$\cos \frac{2\pi \cdot 0}{n} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{n} = \cos \frac{2\pi n}{n} + i \sin \frac{2\pi n}{n}, \quad \cos 0 + i \sin 0 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi.$$

При других значениях k никаких новых значений не получится.

Докажем это.

Если $k = m$, то

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi m}{n} + i \sin \frac{2\pi m}{n}.$$

Если $k = m + n$, то

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi(m+n)}{n} + i \sin \frac{2\pi(m+n)}{n} = \cos \left(\frac{2\pi m}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{2\pi m}{n} + 2\pi \right).$$

Это означает, что общее количество корней не может быть больше n .

Итак, имеется ровно n различных корней n -ой степени из единицы:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \text{ где } k \in Z, 0 \leq k \leq n-1.$$

Пример 4. Найдите значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение. Имеем по формуле: $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2\pi k}{5} + i \sin \frac{2\pi k}{5}$, где $k \in Z, 0 \leq k \leq 4$.

При $k = 0$ получим $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2\pi \cdot 0}{5} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{5} = 1$.

При $k = 1$ получим $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

При $k = 2$ получим $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$.

При $k = 3$ получим $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$.

При $k = 4$ получим $\sqrt[5]{1} = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$.

Убедитесь, что точки, изображающие корни 5-ой степени из 1 расположены в вершинах правильного пятиугольника с радиусом описанной окружности 1.

Точки, изображающие все n значений корня $\sqrt[n]{1}$, расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале.

Исследуем вопрос, как найти $\sqrt[n]{z}$ в общем виде.

Пусть $z = \rho \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Пусть $|\sqrt[n]{z}| = r$.

Пусть также $\sqrt[n]{1} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = 1$ и поскольку $z = (\sqrt[n]{z})^n$, то имеем:

$$z = z \cdot 1 = (\sqrt[n]{z})^n \cdot 1 = r^n \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Следовательно, $\rho = r^n$, $\cos n\varphi = \cos \alpha$, $\sin n\varphi = \sin \alpha$, откуда $n\varphi - \alpha = 2\pi k$,

$$\varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}, \text{ где } k \in Z.$$

Окончательно имеем:

$$\sqrt[n]{z} = r \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } k \in Z.$$

Если в полученной формуле числу k придать натуральные значения от 0 до $n-1$, то получится n различных значений $\sqrt[n]{z}$, если же взять $k = n$, то значение $\sqrt[n]{z}$ совпадёт со значением при $k = 0$:

$$\cos \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi \cdot 0}{n} = \cos \frac{\alpha + 2\pi n}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi n}{n},$$

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos(\alpha + 2\pi) + i \sin(\alpha + 2\pi).$$

При других значениях k никаких новых значений корня не получится. Докажем это.

Если $k = m$, то $\sqrt[n]{z} = \cos \frac{\alpha + 2\pi m}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi m}{n}$.

Если $k = m + n$, то

$$\sqrt[n]{z} = \cos \frac{\alpha + 2\pi(m+n)}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi(m+n)}{n} = \cos \left(\frac{\alpha + 2\pi m}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2\pi m}{n} + 2\pi \right).$$

Это означает, что общее количество корней не может быть больше n .

Таким образом, имеется ровно n различных значений корня $\sqrt[n]{z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Пример 5. Найдём значения $\sqrt{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Пусть $\sqrt{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Перепишем подкоренное выражение в тригонометрической форме:

$$\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

Тогда $\sqrt{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \cos \frac{\pi/3 + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\pi/3 + 2\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 1$.

Различных значений корня имеется два.

При $k = 0$, получим:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \left(\cos \frac{\pi/3 + 2\pi \cdot 0}{2} + i \sin \frac{\pi/3 + 2\pi \cdot 0}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

При $k = 1$, получим:

$$\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \left(\cos \frac{\pi/3 + 2\pi \cdot 1}{2} + i \sin \frac{\pi/3 + 2\pi \cdot 1}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Ответ: $\sqrt{1+i\sqrt{3}} = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right).$

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Запишите формулу возведения в степень комплексного числа, записанного в тригонометрической форме и её следствие (формулу Муавра).

б) Сколько значений может принимать корень n -ой степени из комплексного числа?

2 Вычислите.

а) $\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^3;$

в) $\left(\cos \left(-\frac{3\pi}{28} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{28} \right) \right)^4;$

б) $\left(\cos \frac{\pi}{42} + i \sin \frac{\pi}{42} \right)^9;$

г) $\left(\cos \left(-\frac{\pi}{20} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{20} \right) \right)^{12}.$

3 Вычислите.

а) $\sqrt{\cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20}};$

в) $\sqrt[4]{\cos \frac{10\pi}{7} + i \sin \frac{10\pi}{7}};$

б) $\sqrt[3]{\cos \frac{9\pi}{14} + i \sin \frac{9\pi}{14}};$

г) $\sqrt[5]{\cos \left(-\frac{10\pi}{17} \right) + i \sin \left(-\frac{10\pi}{17} \right)}.$

4 Выразите при помощи формулы Муавра.

а) $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$;

б) $\sin 2\alpha$ через $\sin \alpha$.

П

5 Вычислите значения корня.

а) $\sqrt[3]{1};$

б) $\sqrt[4]{1};$

в) $\sqrt[6]{1};$

г) $\sqrt[7]{1}.$

6 Вычислите значение степени.

а) $(1+i)^4;$

в) $(-\sqrt{3}+i)^3;$

б) $(-1+i)^4;$

г) $(1-i\sqrt{3})^3.$

7 Вычислите значение степени.

а) $\left(1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^4;$

б) $\left(1 - \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4.$

8 Выполните действия: $\frac{(1-i\sqrt{3})^{12} - (1+i\sqrt{3})^{12}}{(-i+1)^{12}}.$

М

9 Решите уравнение: $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$

10 Найдите сумму $1 + z + z^2 + \dots + z^{98}$, где $z = \cos \frac{2\pi}{99} + i \sin \frac{2\pi}{99}.$

11 Известно, что $z + \frac{1}{z} = 1.$ Найдите $z^n + \frac{1}{z^n}.$

12 Выразите:

а) $\cos 5\alpha$ через $\cos \alpha;$

б) $\sin 5\alpha$ через $\sin \alpha.$

13 Докажите, что все корни n -ой степени из 1 образуют геометрическую прогрессию вида: $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}.$

5.7. Свойства комплексных корней многочленов

Напомним некоторые свойства многочленов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Все эти свойства мы доказывали для многочленов с действительными коэффициентами, но они сохраняются и для многочленов с комплексными коэффициентами.

Более того, доказательства этих свойств для многочленов с комплексными коэффициентами практически дословно повторяют доказательства для многочленов с действительными коэффициентами.

1) Остаток q от деления многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - a$ равен значению многочлена при $x = a$, то есть $q = f(a).$

2) Многочлен $f(x)$ делится на линейный двучлен $x - a$ нацело тогда и только тогда, когда a — корень многочлена $f(x).$

3) Если $a_1, a_2, \dots, a_k$ — различные корни многочлена $f(x)$, то многочлен $f(x)$ делится на произведение $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$ нацело.

4) Количество корней многочлена n -ой степени не может превышать $n.$

Следующее утверждение, доказательство которого выходит за рамки школьного курса, называют основной теоремой алгебры многочленов.

Многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

Коэффициенты многочлена могут быть любыми комплексными числами (в том числе, например, действительными или целыми).

Исходя из этой теоремы, можно уже довольно просто доказать следующее важное утверждение:

Многочлен $f_n(x)$ степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами можно представить в виде произведения n линейных множителей:

$$f_n(x) = a_n(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)$$

Доказательство теоремы проведём методом математической индукции.

Если степень многочлена $n = 1$, то произвольный многочлен $f_1(x) = a_1x + a_0$ – можно представить в требуемом виде:

$$f_1(x) = a_1 \left(x + \frac{a_0}{a_1} \right) = a_1 \left(x - \left(-\frac{a_0}{a_1} \right) \right).$$

Предположим при $n = k$ доказано, что произвольный многочлен степени k можно представить в виде произведения k линейных множителей.

Рассмотрим многочлен $f_{k+1}(x)$ степени $k+1$.

Согласно основной теореме алгебры многочленов $f_{k+1}(x)$ имеет некоторый корень c . Тогда по теореме Безу многочлен $f_{k+1}(x)$ можно представить в виде:

$$f_{k+1}(x) = (x-c) \cdot g_k(x), \text{ где } g_k(x) - \text{некоторый многочлен степени } k.$$

Многочлен $g_k(x)$ можно представить в виде произведения линейных множителей $g_k(x) = a_k(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)$.

$$\text{Следовательно, } f_{k+1}(x) = a_k(x-c)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_k)$$

Многочлен $f_{k+1}(x)$ степени $k+1$ удалось представить в виде произведения $k+1$ линейного множителя. Тем самым теорема доказана.

Итак, всякий многочлен $f_n(x)$ степени $n > 0$ можно представить в виде произведения линейных множителей:

$$f_n(x) = a_n(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n).$$

Понятно, что числа $b_1, b_2, \dots, b_n$ – корни многочлена, причём некоторые из них могут совпадать. Других корней этот многочлен иметь не может – при подстановке

числа отличного от $b_1, b_2, \dots, b_n$ ни одна из скобок нулю равняться не может, а значит и произведение нулю равняться не может.

Если какое-либо число b встречается в последовательности чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ несколько раз (k раз), то говорят, что число b является корнем многочлена $f_n(x)$ кратности k .

Это в сочетании со сказанным в предыдущих двух абзацах означает, что верна следующая теорема:

Многочлен $f_n(x)$ степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами имеет n корней (с учётом их кратности).

Из свойств сопряжённых чисел, рассмотренных ранее, следует следующая теорема:

Если число z является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то и сопряжённое ему число $\bar{z}$ является корнем многочлена $f(x)$.

Действительно, как уже говорилось, если в многочлен $f(x)$ подставить сопряжённые числа z и $\bar{z}$, то значениями многочлена будут сопряжённые числа $f(z)$ и $f(\bar{z})$. Поскольку $f(z) = 0$ и нуль сопряжён сам себе, то $f(\bar{z}) = 0$.

Заметим, что $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$ — многочлен с действительными коэффициентами.

Рассмотрим разложение на линейные множители многочлена с действительными коэффициентами:

$$f_n(x) = a_n(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n).$$

Перемножив последовательно пары линейных множителей, содержащих сопряжённые комплексные корни, получим квадратные трёхчлены с действительными коэффициентами, не имеющие действительных корней.

В результате получим произведение, содержащие многочлены 1-ой и 2-ой степени с действительными коэффициентами.

Многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения множителей 1-ой и 2-ой степени с действительными коэффициентами.

ОТВЕТЫ

К параграфу 1.1

3. а) При чётных n ; б) при нечётных n ; в) при $n \geq 1$; г) если $n < m$, то при $|x| > 1$, если $n > m$, то при $|x| < 1$.

4. Число n нечётное.

5. а) Число $n \geq 1$; б) n чётное.

6. а) $0,3^5 < 0,4^5$; б) $0,979^4 > 0,73^4$; в) $0,009^{10} < 0,168^{10}$; г) $0,4^6 > 0,388^6$; д) $0,518^{11} < 0,84^{11}$; е) $0,567^8 > 0,528^8$.

7. а) $0,3^5 > 0,3^6$; б) $0,305^{14} < 0,305^3$; в) $0,09^8 < 0,09^5$; г) $0,84^9 > 0,84^{12}$; д) $0,58^8 > 0,58^{15}$; е) $0,2^{14} < 0,2^{12}$.

8. а) $3,5^5 < 3,5^6$; б) $14,6^6 < 14,6^{12}$; в) $8,23^{15} > 8,23^{14}$; г) $9,5^3 < 9,5^5$; д) $12,88^{10} > 12,88^8$; е) $18,1^6 < 18,1^9$.

9. а) $(-9,2)^3 > (-9,2)^7$; б) $(-19,8)^5 > (-19,8)^{11}$; в) $(-12,1)^{13} < (-12,1)^9$; г) $(-5,9)^{17} < (-5,9)^{15}$; д) $(-18,9)^{11} > (-18,9)^{13}$; е) $(-8,12)^3 > (-8,12)^5$.

10. а) $(-0,22)^3 < (-0,21)^3$; б) $(-0,5)^7 > (-0,8)^7$; в) $(-0,12)^{11} < (-0,1)^{11}$; г) $(-0,82)^5 > (-0,92)^5$; д) $(-0,79)^{11} < (-0,7)^{11}$; е) $(-0,25)^{15} > (-0,35)^{15}$.

11. а) $(-0,92)^9 > (-0,92)^7$; б) $(-0,61)^9 < (-0,61)^{11}$; в) $(-0,4)^3 < (-0,4)^5$; г) $(-0,9)^9 > (-0,9)^7$; д) $(-0,34)^{19} < (-0,34)^{21}$; е) $(-0,04)^{15} > (-0,04)^5$.

12. а) $n < m$; б) $n < m$; в) $n < m$.

13. а) 25^2 ; $(5\sqrt{5})^3$; 5^4 ; б) $\left(\frac{9}{4}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{\frac{81}{16}}\right)^3$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; в) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; г) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$; $\left(\sqrt[6]{2}\right)^3$; $\left(\sqrt[8]{2}\right)^4$.

14. а) $\frac{1}{(0,78)^5} < \frac{1}{(0,78)^{10}}$; б) $\frac{1}{(-0,23)^{17}} < \frac{1}{(-0,23)^{13}}$; в) $\frac{1}{(0,22)^5} > \frac{1}{(0,23)^5}$;

г) $\frac{1}{(-3,4)^{11}} < \frac{1}{(-3,4)^{13}}$.

15. а) $x \in (0; 2)$; б) $x \in (-4; 0) \cup (4; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$; г) $x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

16. а) $(0, 02)^5$; б) $-0,9$; в) $(3,5)^5$; г) $(-1,1)^{13}$.

17. а) $m = 6k - 1, \quad k \in N$; б) $m = 10k - 7, \quad k \in N$; в) $m = 8k - 1, \quad k \in N$;
г) $m = 28k - 10, \quad k \in N$.

К параграфу 1.2

3. а) Один; б) два; в) ни одного; г) один.

4. а) Нет; б) да; в) да; г) да; д) да; е) да.

5. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) да; е) да.

6. а) $0,3$; б) -4 ; в) 10 ; г) $\frac{11}{3}$; д) $0,2$; е) 7 .

7. а) $2,154$; б) $1,174$; в) $-0,947$; г) $1,046$.

8. а) $0,1475$; б) $-4,8009$; в) $0,4107$; г) $1,0187$.

9. а) $\pm 1,230$; б) $-0,995$; в) $\pm 0,840$; г) $1,128$.

10. а) $\sqrt[10]{13} < \sqrt[5]{13} < \sqrt[8]{13}$; б) $\sqrt[16]{18} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{19}$; в) $\sqrt[18]{7} < \sqrt[6]{11} < \sqrt[4]{8}$; г) $\sqrt[19]{2} < \sqrt[8]{11} < \sqrt[4]{18}$.

11. а) 2 ; б) 3 ; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{1}{28}$.

12. а) $x \in [-1; +\infty)$; б) $x \in [-2; 0) \cup (0; +\infty)$; в) $x \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$;

г) $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

13. а) $\sqrt[10]{2} < \sqrt[1]{2,2}$; б) $\sqrt[14]{0,5} < \sqrt[15]{0,55}$; в) $\sqrt[100]{100} > \sqrt[150]{150}$; г) $\sqrt[3]{\pi} > \sqrt[5]{\pi + 2}$.

14. а) $\pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{7}{3}}$; б) $\frac{53}{30}$; в) $-9; 1$; г) $\sqrt{3}$.

15. а) $\sqrt[780]{5}$; б) 3 ; в) 4 ; г) -6 .

16.
$$\frac{42\sqrt[3]{2} + 28\sqrt[3]{9} - 12\sqrt[3]{49} + 6\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{49} + 14\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{14} + 4\sqrt[3]{1764}}{252}.$$

17. Первое из чисел меньше второго.

18. 1.

19. 1.

К параграфу 1.3

6. а) 125; б) 81; в) 16; г) 7; д) 9; е) 32.

7. а) 2; б) 6; в) 3; г) 2; д) 11; е) 5.

8. а) 2; б) 2; в) 3; г) 11; д) 6; е) 2.

9. а) 2; б) 10; в) 6; г) 9; д) $\frac{5}{3}$; е) $\frac{4}{7}$.

10. а) $|x|$; б) x ; в) x ; г) $|x|$; д) $|x|$; е) x .

11. а) $s-3$; б) $3-s$; в) $1-2s$; г) $1-2s$.

12. а) $\pi-3$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$; г) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

13. а) xy ; б) $-xy$; в) xy ; г) $-xy$.

14. Если $x \in [0; 1] \cup [2; +\infty)$, то $2x-3x^2+x^3$, если $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$, то $3x^2-2x-x^3$.

15. а) $\sqrt[12]{32}$; б) 0.

16. а) 3; б) $\frac{20}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\sqrt[3]{20}$.

17. $\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{x+y}$.

18. 2.

19. а) 1; б) 2; в) 4; г) 3.

20. а) $\sqrt[17]{k^4}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

21. а) 2; б) если $q < 0$ то выражение не имеет смысла,

если $\begin{cases} q > 0 \\ p < 0 \end{cases}$ то $\frac{\sqrt[3]{-p^7 q^2} - \sqrt[3]{-pq^7}}{\sqrt{q^5} - p^2 \sqrt[6]{q^5}}$, если $\begin{cases} q > 0 \\ p > 0 \end{cases}$ то $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[6]{q}}$.

23. 1.

К параграфу 1.4

6. а) $\sqrt[3]{5^2}$; б) $\sqrt[4]{2^3}$; в) $\sqrt[5]{7^4}$; г) $\sqrt[7]{11^5}$; д) $\sqrt[4]{10}$; е) $\sqrt[7]{9}$.

7. а) $4^{\frac{2}{3}} < 4^{\frac{3}{4}}$; б) $0,7^{\frac{5}{3}} > 0,7^{\frac{7}{4}}$; в) $3^{\frac{6}{7}} < 3^{\frac{5}{2}}$; г) $0,1^{\frac{1}{11}} > 0,1^{\frac{8}{9}}$; д) $2^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{2}{3}}$;

е) $0,25^{\frac{4}{5}} < 0,25^{\frac{5}{7}}$.

8. а) $(4 - \sqrt{10})^{\frac{1}{2}} > (4 - \sqrt{10})^{\frac{2}{3}}$; б) $(\sqrt[4]{0,17})^{\frac{5}{3}} < (\sqrt[4]{0,17})^{\frac{11}{8}}$; в) $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{2}} > (\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$;

г) $(\sqrt[7]{0,01})^{-\frac{2}{3}} > (\sqrt[7]{0,01})^{-\frac{3}{5}}$; д) $(2 - \sqrt[3]{4})^{\frac{7}{2}} < (2 - \sqrt[3]{4})^{\frac{5}{2}}$; е) $(\pi - 3)^{\frac{11}{12}} < (\pi - 3)^{\frac{6}{7}}$.

9. а) 31; б) 218; в) 3; г) -93; д) 311; е) 641.

10. а) 16; б) 27; в) 9; г) 32; д) 128; е) 125.

11. а) $x^{\frac{1}{2}}$; б) $x^{\frac{7}{12}}$; в) x^2 ; г) $x^{\frac{1}{4}}$; д) x^4 ; е) $x^{\frac{9}{8}}$.

12. а) $a+b$; б) $(x+1)^{\frac{3}{10}}$; в) $16x^{\frac{17}{7}}$; г) $\frac{1}{27}x^{\frac{3}{4}}$.

13. а) $4\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) 25; г) $7\sqrt{7}$.

14. а) $z^{\frac{2}{3}}$; б) $x^{\frac{5}{6}}$; в) $a^{\frac{7}{9}}$; г) $t^{\frac{19}{24}}$; д) $n^{\frac{17}{5}}$; е) $w^{\frac{8}{153}}$.

15. а) $(2 - \sqrt{3})^{\frac{3}{5}}$; б) $(r+t^2)^{\frac{27}{16}}$; в) $(y+5x)^{\frac{2}{5}}$; г) $(\sqrt{5}-2)^{\frac{13}{18}}$.

16. а) 36; б) $9\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 625.

17. а) $x^{\frac{2}{3}}$; б) $x^{\frac{38}{35}}$; в) $x^{\frac{5}{28}}$; г) $x^{\frac{79}{154}}$; д) $x^{\frac{19}{20}}$; е) $x^{\frac{9}{4}}$.

18. а) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; б) $\frac{1+x^{\frac{1}{11}}}{2+x^{\frac{1}{11}}}$; в) 1; г) $x^{\frac{1}{24}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{24}}}$.

21. а) 49; б) 1; в) 30; г) 2.

22. а) 0; б) 0.

23. а) $2(a+b)$; б) $\frac{1+\sqrt[10]{a}}{\sqrt[3]{b^2}}$.

25. 3.

26. а) 11; б) $\frac{33}{37}$; в) 1; г) 10.

27. $\frac{7}{13}$.

К параграфу 1.5

6. а) Возрастающая; б) убывающая; в) убывающая; г) возрастающая; д) убывающая; е) возрастающая.

7. а) Неубывающая; б) невозрастающая; в) неубывающая; г) невозрастающая.

11. 7; 22; 68.

12. 23; 503; 2003.

13. а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+2} = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{2n+5} = 1$; в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n}{2-n} = 1$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$.

14. а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+2}{n^2+1} = 1$; б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2-n}{n^2} = 2$; в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{n(2n+1)} = \frac{1}{2}$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} = 0$.

15. Последовательность имеет вид $a_n = 1 + 2^{1-n}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

16. Последовательность имеет вид $a_n = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$.

20. а) 1; б) 2; в) 1; г) 2.

21. а) e^2 ; б) $\frac{1}{e}$; в) e^4 ; г) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

26. Рассмотрите предел последовательности $S_n = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$.

28. а) 0; б) 0; в) 0.

К параграфу 1.6

10. а) 2; б) 4; в) 2; г) 0,5; д) 3; е) 4.

11. а) -2; б) -3; в) -2; г) 2; д) 4; е) 3.

12. а) 5; б) 6; в) 4; г) 0; д) $\frac{3}{2}$; е) 12.

13. а) $\frac{1}{5}$; б) 2; в) -3; г) 2; д) 3; е) $\frac{1}{4}$.

14. а) 8; б) 125; в) $\frac{1}{5}$; г) 100; д) 65536; е) 4.

15. а) 5; б) $16\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) 16; д) $\frac{1}{3}$; е) $\sqrt[10]{6}$.

16. а) 2; б) 4; в) 2; г) -5.

17. а) 2; б) 5; в) 6; г) 3.

18. а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) 8; г) 3.

19. а) 0; б) 0; в) $2\log_x y$; г) $3\log_x y$.

20. а) 49; б) 4; в) 121; г) 1000.

21. а) $-\frac{3}{4}$; б) 3; в) 0; г) 0.

22. а) -2; б) -2; в) -2; г) -6.

23. а) $\frac{2}{3}$; б) 4; в) 12; г) $\frac{1}{4}$.

24. а) 0; б) 0.

25. а) $\frac{21}{5}$; б) $\frac{5a-3}{6}$.

26. а) 24; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\frac{1}{75}$; г) $\frac{2409}{5}$.

27. а) 1; б) $\frac{1}{3}$; в) 6; г) $\frac{1}{72}$.

28. а) $\log_a b$; б) $-\frac{\log_a ab}{2}$; в) $(\log_b a)^2$; г) 0.

30. а) $\frac{24}{3+x}-4$; б) $\frac{x+xy+3}{x+2xy+2}$; в) $\frac{x(y+2)+1}{x(2y+1)+1}$; г) $\frac{2xy}{2x+y}$.

31. 0.

32. 23.

33. 1.

К параграфу 1.7

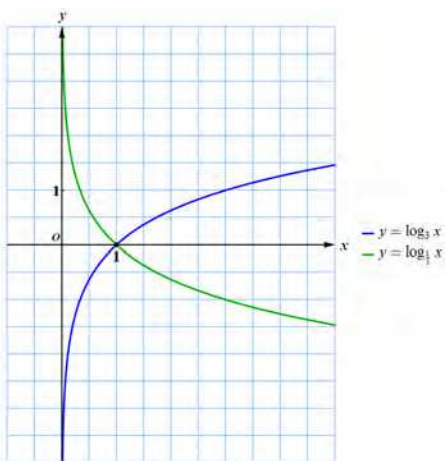
6. Графики этих функций симметричны относительно оси абсцисс.

7. а) Да; б) да; в) $+\infty$ при $a > 1$ и $-\infty$ при $0 < a < 1$.

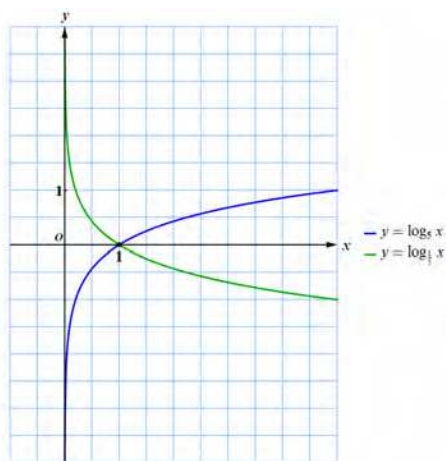
8. Обратной функцией для логарифмической функции $y = \log_a x$ служит функция $y = a^x$.

9.

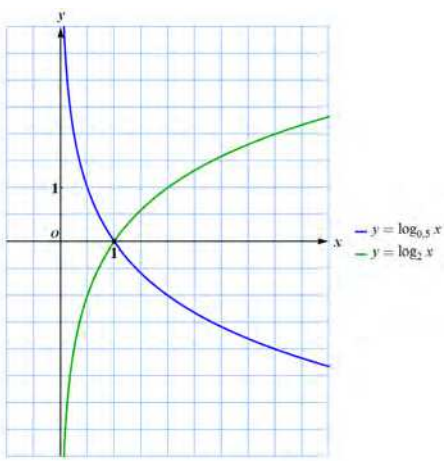
а)



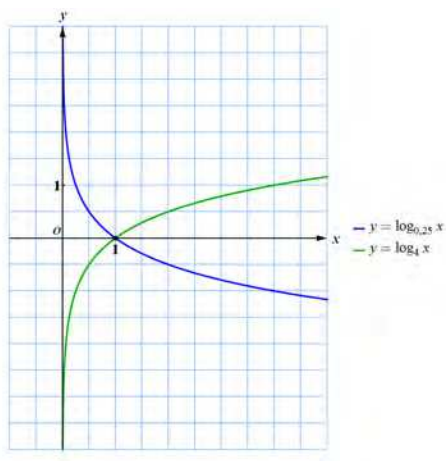
в)



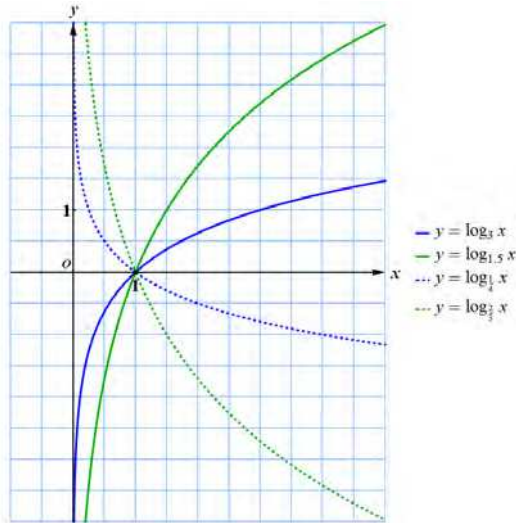
б)



г)



10.

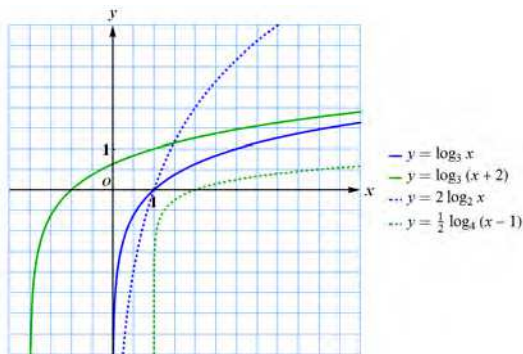


11. а) $\log_3 5 < \log_3 6$; б) $\log_7 12 < \log_7 \sqrt{145}$; в) $\log_{10} \frac{7}{8} > \log_{10} \frac{3}{4}$; г) $\log_5 2 < \log_5 2,2$.

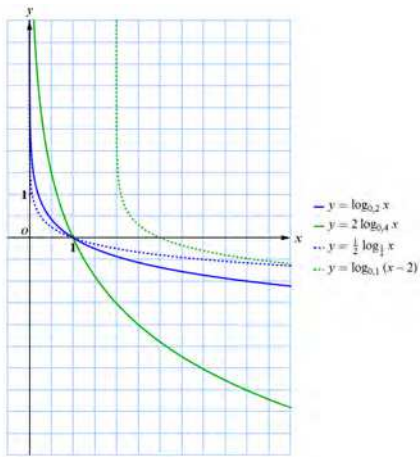
12. а) $\log_{0,9} 8$; б) $\log_{0,1} \frac{1}{3}$; в) $\log_{\frac{13}{9}} 9$; г) $\log_{\frac{4}{5}} 1,8$.

13. а) Положительные при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$;
 б) положительные при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$;
 в) положительные при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$;
 г) положительные при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

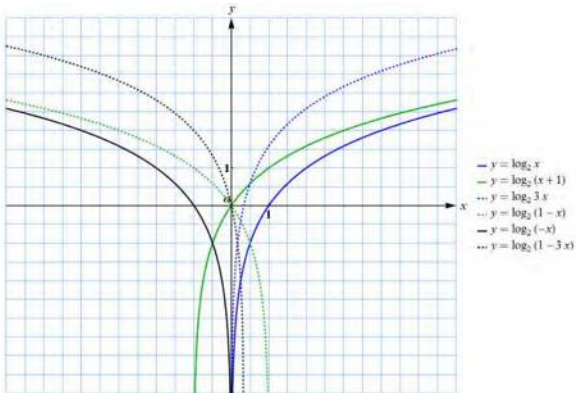
14.



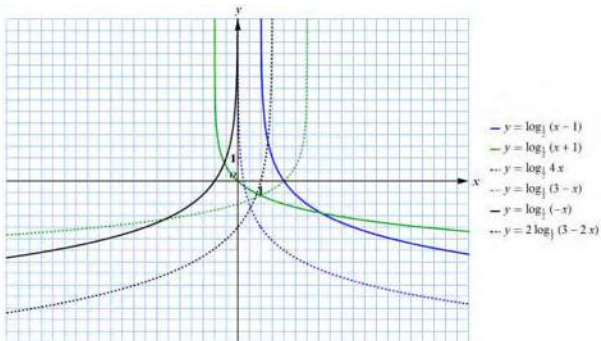
15.



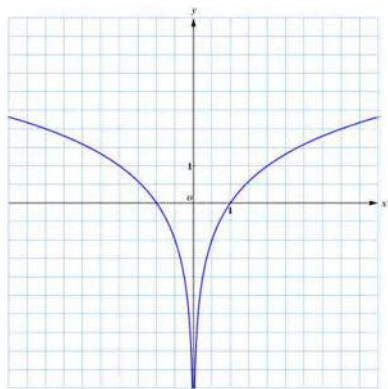
16.



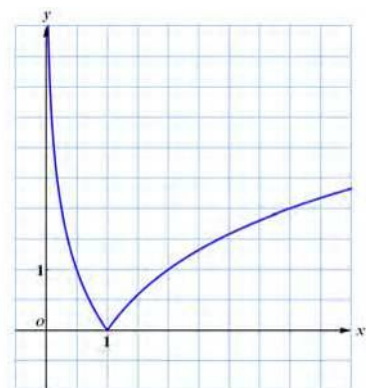
17.



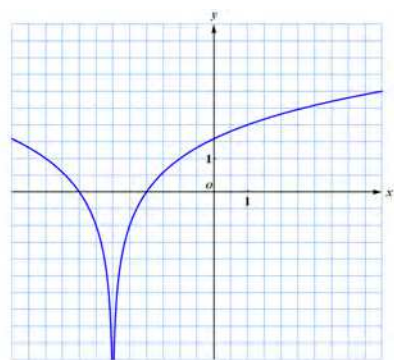
18. a)



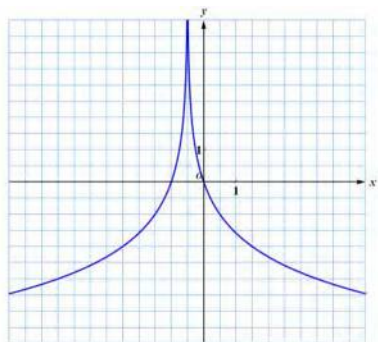
б)



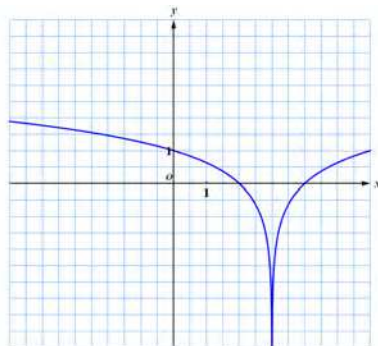
в)



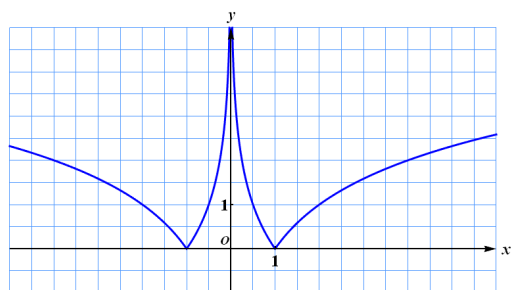
г)



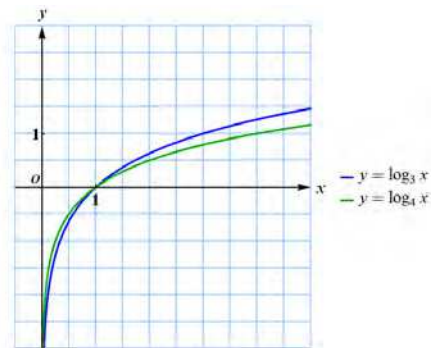
д)



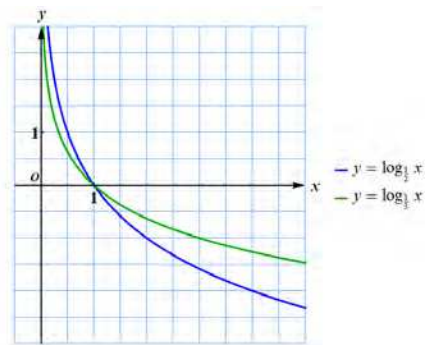
е)



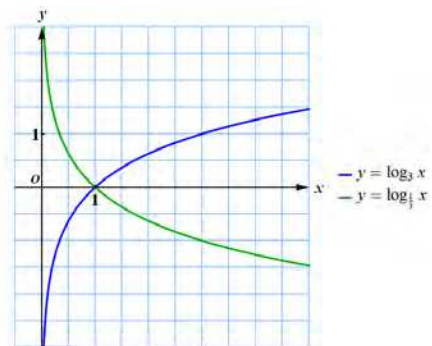
19. a)



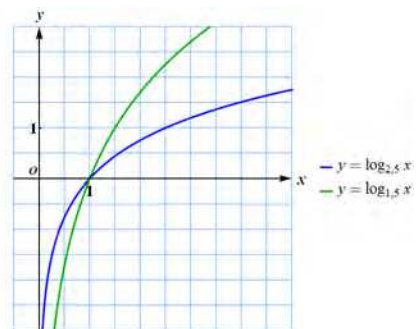
б)



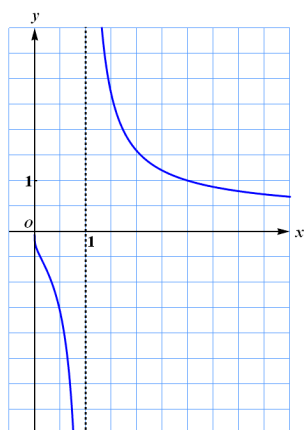
В)



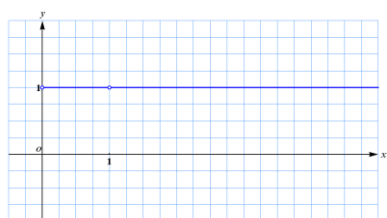
г)



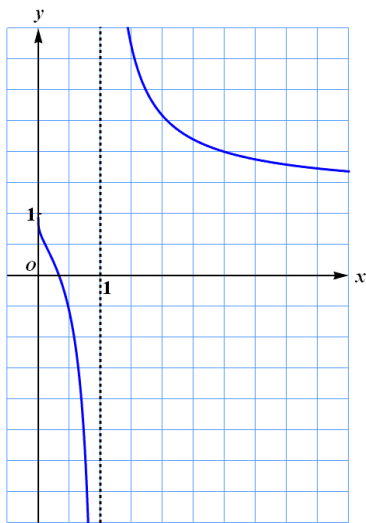
20. а)



б)



В)



К параграфу 1.8

3. а) $x + 2x \ln x$; б) $\frac{2^x}{x^2}(x \ln 2 - 1)$; в) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$; г) $(x+1)e^x$; д) $\frac{3^x}{x}(x \ln 3 \ln x + 1)$;

е) $\frac{2}{x}(\ln x + 1)$.

4. а) $\frac{1}{x+1}$; б) $2^{3^x} 3^x \ln 2 \ln 3$; в) $2^x + x(2^x \ln 2 + 2)$;

г) $\frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - (2^x + 3^x) \ln 4}{4^x}$; д) $\frac{x - x \ln x + 1}{x(x+1)^2}$; е) $\frac{5^x \ln 5}{5^x + 1}$.

5. а) $(x(x+3)+1)e^{x-1}$; б) $2x(2x(x+1)-1)e^{2x-3}$; в) $-(x+2)^2(2x+1)e^{1-2x}$;

г) $\frac{1}{8}(6x-1)(6x+23)e^{\frac{2+x}{2}}$.

6. а) $\frac{2x-5}{(x-2)^2}e^{2x+1}$; б) $\frac{5x^3+3x^2-5x-2}{2(x^2+x-1)^2}e^{\frac{5x}{2}+4}$; в) $e^x(x+e^2(x+1)+3)$; г) $\frac{2-e^x(x-3)}{(x+e^x)^2}$.

7. а) $\frac{1}{x}$; б) $4e^{-2x}$; в) $e^x(2x+5)$; г) $2 \ln x - \frac{1}{x^2} + 3$; д) $-\frac{3+\ln x}{x^2(1+\ln x)^3}$; е) $\frac{x^2-2x+2}{x^3}e^x$.

8. а) Минимум при $x = -\frac{1}{3}$; б) минимум при $x = -\frac{109}{10}$; в) экстремумов нет;
г) максимум при $x = -\log_2 \ln 2$.

9. а) Минимум при $x = 2$, максимум при $x = 11$; б) минимум при $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$,
максимум при $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$; в) минимум при $x = -2$, максимум при $x = 1$;
г) минимум при $x = \frac{1}{2}$, максимум при $x = -\frac{21}{4}$.

10. а) Возрастает при $x \in (2; 11)$, убывает при $x \in (-\infty; 2) \cup (11; +\infty)$; б) возрастает
при $x \in \left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(0; \frac{1}{12}\right)$; в) возрастает при
 $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{3}; 11) \cup (0; 1 + \sqrt{3})$, убывает при $x \in (1 - \sqrt{3}; 0) \cup (1 + \sqrt{3}; +\infty)$;
г) возрастает при $x \in (0; e^3)$, убывает при $x \in (e^3; +\infty)$.

11. -21.

12. 4.

13. $6 \ln \frac{14}{13} - \frac{1258}{169}$. Указание. Функция возрастает на отрезке, поэтому $y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{14}{13}\right)$.

14. -7. $\left(-\frac{7}{6}; \ln \frac{36}{25} - \frac{49}{6}\right)$.

15. -1.

16. -1.

17. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; -1 - \ln 3\right)$.

18. а) Возрастает при $x \in R$; б) возрастает при $x \in (-1; 0)$, убывает при $x \in (0; 1)$,
при $x = 0$ максимум; в) возрастает при $x \in (0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0)$, при
 $x = 0$ минимум; г) возрастает при $x \in (e; +\infty)$, убывает при $x \in (0; 1) \cup (1; e)$, при
 $x = e$ минимум.

19. а) Возрастает при $x \in (0; e)$, убывает при $x \in (e; +\infty)$; б) возрастает при $x \in (0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0)$; в) возрастает при $x \in \left(-\frac{1}{e}; 0\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{e}\right)$; г) возрастает при $x \in (0; +\infty)$.

20. а) Минимум $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)$; б) минимум $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4} - \ln 2\right)$; в) максимум $(e; e)$; г) максимумы в точках $(-1; 1)$ и $(1; 1)$.

21. а) Минимум при $x = -5$, максимум при $x = -3$, функция возрастает при $x \in (-5; -3)$, убывает при $x \in (-\infty; -5) \cup (-3; +\infty)$; б) минимум при $x = 0$, функция возрастает при $x \in (0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0)$; в) минимум при $x = -\frac{5}{2}$, функция возрастает при $x \in \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$;

г) минимум при $x = -\frac{5}{3}$, максимум при $x = -\frac{8}{3}$, функция возрастает при $x \in \left(-\infty; -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}; +\infty\right)$, убывает при $x \in \left(-\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}\right)$.

22. $\ln 4$.

23. $\ln 2$.

24. $\ln \frac{32}{27}$, при $x = -\frac{4}{3}$.

25. $\ln \frac{4}{3}$, при $x = -\frac{1}{2}$.

К параграфу 2.1

7. $x(t) = t^2 + t + 2$.

8. $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \frac{20}{3}$.

9. $x(t) = \frac{3t^2}{2} + \cos t + 1$.

10. $v(t) = \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t + \frac{3}{8}$.

12. а) $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$; б) $-\cos x + \sin 2x + C$; в) $2\cos \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} x + C$;

г) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x + \frac{3}{2}\sin \frac{x}{3} + C$.

13. а) $\frac{3}{x} + \frac{x^4}{4} + C$; б) $x^7 - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + C$; в) $\ln|x| - \frac{2}{(1+x)^2} + C$;

г) $-\frac{1}{x} + x + \frac{x^3}{3} + C$.

14. а) $\frac{\sin x}{2} + \frac{1}{6}\sin 3x + C$; б) $\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$; в) $\frac{\sin x}{2} - \frac{1}{14}\sin 7x + C$;

г) $2\cos \frac{x}{4} - \frac{2}{3}\cos \frac{3x}{4} + C$.

15. а) $\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2^x}{\ln 2} - \ln|x| + C$; б) $\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$; в) $-\frac{9^{-x}}{\ln 9} - \frac{12^{-x}}{\ln 12} + C$;

г) $e^{2x} - e^{-2x} + 4x + C$.

16. а) $2x^3 + 3x^2 + 2x - 81$; б) $\frac{4x^3}{3} + 4x^2 + 7x - \frac{1061}{6}$; в) $\frac{2x^3}{3} + 3x^2 + x - \frac{14}{3}$;

г) $\frac{10x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x + \frac{32\sqrt{3} - 27}{2}$.

17. а) $x^3 + x^2 + 2x + 5$; б) $-\frac{1}{2x^2} + x^2 - \frac{3}{x} + \frac{61}{8}$; в) $-\frac{\cos x}{2} - \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{37}{12}$;

г) $2^x + 3^x - 55$.

20. а) $2\ln|2+x| - \ln|1+x| + C$; б) $\frac{5}{8}\ln|1-2x| - \frac{3}{8}\ln|1+2x| + C$;

в) $\frac{6}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln|1-3x| + C$; г) $\ln|5-x| - \ln|2-x| + C$.

21. а) $-\frac{\cos 4x}{32} + C$; б) $\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{32}\sin 8x + C$;

в) $-\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{24}\cos 6x + C$; г) $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$.

22. а) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$; б) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; в) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; г) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$.

23. а) $\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{8}$; б) $\frac{2}{9} \ln|1-3x| - \frac{1}{9} \ln \left| \frac{1+3x}{3} \right| + 2$;

в) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x - 1}{\ln 3} + 5 - \frac{1}{\ln 16}$; г) $2\sqrt{\frac{x}{3}} + \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} - 9$.

24. $x(t) = t + \frac{2}{9t+15} + \frac{5}{9}$. $t = \frac{\sqrt{103}-4}{9}$ с. $t = \frac{1}{3}$ с.

25. $v(t) = \frac{\alpha t^2}{2} + \beta t + v_0$, $x(t) = \frac{\alpha t^3}{6} + \frac{\beta t^2}{2} + v_0 t + s_0$.

26. а) $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; б) $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$; в) $\frac{1}{16} \cos 4x$;

г) $-x + \operatorname{tg} x + C$.

К параграфу 2.2

6. а) 0; б) -20; в) 2; г) $\frac{9}{\ln 10}$; д) $\frac{2}{3}$; е) -128.

7. а) 0; б) $\frac{5}{3}$; в) 0; г) $-\frac{4}{\pi}$.

8. а) $\frac{20}{3}$; б) $\frac{1}{30}$; в) $\frac{75}{4}$; г) $\frac{259}{64}$.

9. а) $\frac{9}{2}$; б) $4940 + 10^{10} \sqrt{10^9}$; в) 0; г) $\frac{8}{225}$.

10. а) $\frac{1}{4} + \frac{\pi}{6}$; б) $\frac{535}{324}$; в) $6 - 9 \ln \frac{7}{4}$; г) 0.

11. а) $\frac{2}{3}$; б) $\pi - 1$; в) $\frac{3+e^2}{2}$; г) $\frac{21}{4}$.

12. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\ln 2} - 1$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{5}{16}(6 + \ln 7)$.

13. а) 64; б) $-\frac{4}{5}$; в) $\frac{2}{11}$; г) 47.

14. а) $3 - 3\sqrt{2}$; б) $\frac{7}{45}$; в) $-\frac{45}{32}\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{14}$.

15. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{19}{315}$; в) $-\frac{1}{4}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{48}$.

16. а) 36; б) $-\ln \frac{9}{8}$; в) $4 - \ln 9$; г) $-\frac{13}{6}$.

17. 2.

18. $\frac{4}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

19. а) $\frac{3\pi}{8}$; б) $\frac{15\pi}{16}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $1 - \frac{39}{55\sqrt{2}}$.

К параграфу 2.3

4. а) $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$; б) $2 + \frac{3\pi}{2}$; в) $\frac{14}{3}$; г) $\ln \frac{3}{2}$.

5. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{8}{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6}$; в) $7 \ln \frac{12}{5}$; г) $\frac{4}{\sqrt{3}} - 2$.

6. $\frac{9}{2}$.

7. $\frac{1}{6}$.

8. $\frac{128}{3}$.

9. $\frac{9}{8}$.

10. $\frac{90640}{2187}$.

11. 108.

12. 22,3 Дж.

13. 34,5 Дж.

14. а) $\frac{3}{\ln 16} - \frac{8}{9 \ln 3}$; б) $\frac{11 - 5\sqrt{5}}{4}$; в) $\frac{5}{2} - \ln \frac{81}{16}$; г) $\frac{1}{3}$.

15. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{176\sqrt{2}}{15}$; в) $\frac{1}{6} + \frac{2}{\pi}$; г) $\frac{13}{3} - \frac{7\sqrt{2}}{3} - \ln(1 + \sqrt{2})$.

16. 3A Дж.

17. $\frac{9}{91} A$ Дж.

18. $\frac{2\pi}{15} g \approx 4,1$ Дж.

19. $\frac{4\pi}{3} g R^4 (\rho_1 - \rho_2)$ Дж.

К параграфу 3.1

2. а) 6; б) -3; в) -1; г) -2; д) 2; е) 3; ж) 2; з) -2.
3. а) 2; б) -12; в) 1; г) $-\frac{1}{3}$; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{17}{13}$; ж) $2\frac{5}{6}$; з) $2\frac{4}{7}$.
4. а) 25; б) $\sqrt{8}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) 9; д) 4; е) 0,125; ж) $\sqrt{10}$; з) 100.
5. а) -2; б) корней нет; в) $-\frac{1}{3}$; г) 1 и -3; д) 3; е) 6 и -2.
6. а) 2; б) 1; в) 2; г) 3.
7. а) 4; б) 1 и -8; в) $\pm\sqrt{2}$; г) 4.
8. а) 2; б) 1; в) 0; г) -1.
9. а) 4; б) 9; в) 16; г) 27.
10. а) $3 + \lg 3$; б) $\log_6 13,5$; в) $\frac{5}{3} \lg 5$; г) $-\log_{1,5} 3$.
11. а) 3 и $\frac{5}{3}$; б) 3 и -4;
12. а) 2; б) 4; в) 2; г) $x = \frac{19}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{10}$.
13. а) 1 и $\log_2 9$; б) 1; $-\log_3 36$.
14. а) 3; π ; $\frac{1}{\pi}$; б) e .
15. а) Один; б) один; в) один.

К параграфу 3.2

2. а) $(0; +\infty)$; б) $(-3; +\infty)$; в) $(-\infty; 1]$; г) $(-\infty; -5)$; д) $(-\infty; -0,4]$; е) $(-\infty; -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}; +\infty)$; ж) $(-\infty; -3]$; з) $(-\infty; -1) \cup (1,5; +\infty)$.
3. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-3; 4)$; в) $(-\infty; -0,25)$; г) $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.
4. а) $(25; +\infty)$; б) $[4; +\infty)$; в) $[\sqrt[5]{3}; +\infty)$; г) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right)$; д) $(0; 0,1)$; е) $(0; 0,81]$; ж) $(0; 0,5]$; з) $(0; 3)$.
5. а) $\left(\frac{8}{7}; \frac{9}{7}\right)$; б) $\left(\frac{22}{9}; \frac{5}{2}\right)$; в) $(0,25; 0,75]$; г) $(2; 3)$; д) $[-4; -2) \cup (-2; 0]$; е) $[-1; 0) \cup (3; 4]$.

6. а) $(4; +\infty)$; б) $(6; +\infty)$; в) $\left(\frac{7}{3}; 8\right]$; г) $(5; +\infty)$
 7. а) $(-\infty; 1)$; б) $[0; +\infty)$; в) $(0; +\infty)$; г) $(-\infty; -2]$.
 8. а) $\left(-\frac{4}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty)$; б) $(5; 6)$; в) $(2; 2,5)$; г) $(4; 5)$.
 9. а) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; б) $(-1; 2]$; в) $(-\infty; 0) \cup (0,8; +\infty)$; г) $(4; +\infty)$.
 10. а) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right]$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$; в) $[4; +\infty)$; г) $(0; +\infty)$.
 11. а) 1; б) не существует; в) 6; г) 2.
 12. а) 1; б) x – любое число; в) 8; г) 3.
 13. а) $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup (1,5; +\infty)$; б) $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; г) $[5; +\infty)$.
 14. а) $(0; 1) \cup (1,5; +\infty)$; б) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$; в) $[-1; 1,6]$; г) $(1; 2] \cup [3; +\infty)$.

К параграфу 3.3

2. а) 0 и 1; б) 2; в) $(9; 27)$; г) 2 и 4.
 3. а) $(0; +\infty)$; б) $(-\infty; \log_2 3]$; в) $(8; 27)$; г) $[2; 4]$.
 4. а) 2; б) 1; в) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; г) 3 и 9.
 5. а) $(2; +\infty)$; б) $(-2; 0)$; в) $(0; 4) \cup \{8\}$; г) $(0; 1) \cup (4; +\infty) \cup \{2\}$.
 6. а) 2; б) 3; в) $\sqrt{2}$ и 4; г) $-0,75$ и 3.
 7. а) $(2; +\infty)$; б) $(\log_2 7; 3)$; в) $(0; 1) \cup (\sqrt{2}; 4)$; г) $(-0,75; 0) \cup (3; +\infty)$.
 8. а) 0,5; б) $\sqrt{2}$, 3.
 9. а) $\log_2 24$; б) 0 и 2; в) 1; 2; г) $\frac{1}{16}; \frac{1}{4}; 4; 16$.
 10. а) -3 ; -2 ; б) 2 – наибольшее; наименьшего значения нет.
 11. а) 5 и 0,1; б) 0,4 и 10.
 12. а) $(-\infty; -1]$; б) $(0; 0,5)$.
 13. а) $\log_2 9$; $\log_3 2$; б) 5.
 14. а) $\sqrt{10}$; б) 100.
 15. а) Нет решений; б) нет решений.
 16. $(0; 2]$.
 17. $(0,2; +\infty)$.
 18. а) ± 1 ; б) 1.

К параграфу 3.4

2. а) Нет; б) нет.
4. а) 0; б) 4; в) 2; г) 13.
5. а) $(1;2]$; б) $(9;+\infty)$; в) $[4,8;10)$; г) $(3;5)$.
6. а) 4; б) $\sqrt{3}-2$; в) 3; г) 1 и 9.
7. а) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$; б) $(2;3]$; в) $(-2;1)$; г) $\left(\frac{2}{3};1\right) \cup (1;+\infty)$.
8. а) 2; б) 4; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$; г) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$.
9. а) 2; б) 1; в) нет корней; г) 3.
10. а) 10; б) $2\sqrt{2}-2$; в) 9; г) 4 и $\frac{10}{3}$.
11. а) $(2;4)$; б) $(5;+\infty)$; в) $(0;+\infty)$; г) $(3;5]$.
12. а) $(-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (2;+\infty)$; б) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) \cup (1;+\infty)$; в) нет решений;
г) $(0;0,5] \cup (1;1,2)$.
13. а) $(4-\sqrt{2};3) \cup (4+\sqrt{2};+\infty)$; б) $(2+\sqrt{2};4)$.
14. а) 1; б) нет корней.
15. 2.
16. $(-0,5;0)$.

К параграфу 3.5

2. а) $(4;1)$; б) $(6;1,5)$; в) $(0,5;1,5)$; г) $(12;5)$.
3. а) $(2;2)$; б) $(1;\log_3 4)$; в) $(81;2)$; г) $(2;4)$, $(4;2)$.
4. а) $(2;1)$, $(1;2)$; б) $(3;1)$, $(1;3)$; в) $\left(8;\frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{4};27\right)$; г) $(2;4)$, $(4;2)$.
5. а) $(8;2)$; б) $(0,75;0,5)$; в) $(27;9)$; г) $(2;2)$.
6. а) $(1;0,4)$; б) $\left(\frac{1}{36};-2\right)$.
7. а) $(1;1)$; $(3\sqrt{3};\sqrt{3})$; б) $(1;1)$, $(\sqrt{2}-1;\sqrt{2}+1)$.
8. а) $(1;1)$; б) $(1;2)$.
9. а) $(3;3)$; б) $(0,5;0,25)$.
10. а) $(-4;-1)$, $(4,1)$; б) $(3;3)$, $(\sqrt{3},9)$.

11. а) $(-1; 1)$; б) $\left(-1; \frac{23}{2}\right)$ и $(2; 1)$.

12. а) $(5; 5)$; б) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

13. а) $(0; -1)$, $(1; 0)$; б) $\left(\frac{1}{2}; \log_9 18\right)$

14. а) Нет решений; б) $(1; 1; 1)$, $(4; 2; \sqrt{2})$.

15. $(3; 3)$.

К параграфу 3.6

2. а) 2; б) нет корней; в) 3; г) нет корней.

4. а) -45 ; б) 15; в) 0; г) 0 и -10 .

5. а) 2; б) -2 ; в) 3; г) 1.

6. а) 5; б) 1; в) 2; г) 1 и -2 .

7. а) 2; б) 0 и -2 ; в) 0 и $-\frac{10}{3}$; г) 0 и 2;

8. а) 2; б) 0,5 и -3 ; в) 1 и $\sqrt{3}$; г) 2.

9. а) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; б) 1 и 4; в) $\frac{13-\sqrt{21}}{2}$; г) 19.

10. а) $3 + \frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

11. а) $-\sqrt{3}$; б) нет корней.

12. а) нет корней; б) 1.

13. а) $(-\infty; 1]$; б) $[-1; +\infty)$.

14. а) 1; б) 1;

К параграфу 3.7

3. а) 4; б) 5 и 17; в) -1 ; г) корней нет.

4. а) 1 и $-\frac{27}{8}$; б) нет корней; в) 1; г) 76.

5. а) 3 и 1,4; б) 2; в) 6; г) -1 .

6. а) 1; б) 3; в) $-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}$; г) $\frac{5}{3}$.

7. а) 2; б) 1 и 2; в) $-4,5$ и 3; г) $-\frac{2}{3}; 1; 2; \frac{11}{3}$.

8. а) 1 и 20; б) 16 и 81; в) 12; г) 4.

9. а) $[2; +\infty)$; б) 15.

10. а) 11 и -4; б) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

11. а) -1; б) 0 и -1.

К параграфу 4.2

2. а) среднее $\frac{99}{10}$; размах 17; медиана $\frac{21}{2}$; мода 8, 9 и 19; дисперсия $\frac{3189}{100}$;

среднеквадратическое отклонение $\frac{\sqrt{3189}}{10}$; б) среднее $\frac{21}{2}$; размах 18; медиана $\frac{15}{2}$;

мода 4, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 17, 18; дисперсия $\frac{597}{20}$; среднеквадратическое отклонение

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{597}{5}}$; в) среднее 10; размах 16; медиана 13; мода 17; дисперсия $\frac{166}{5}$;

среднеквадратическое отклонение $\sqrt{\frac{166}{5}}$; г) среднее $\frac{54}{5}$; размах 14; медиана $\frac{21}{2}$;

мода 10 и 11; дисперсия $\frac{389}{25}$; среднеквадратическое отклонение $\frac{\sqrt{389}}{5}$.

3. а) $\frac{18419}{400} \approx 46,0475$; $\frac{37}{2} \approx 6,7858$; б) $\frac{18419}{400} = 18,5$; $\sqrt{\frac{37}{2}} \approx 4,3$.

4. а) 15; б) 12; в) $\frac{107}{7}$.

5. а) $\frac{313}{7} \approx 44,7$; б) 13; в) 47; г) 49.

6. а) $\frac{41}{6}$; б) 2; в) $\frac{27}{4}$.

11. $\frac{271}{60} \approx 4,52$; 8; 5; 6; $\frac{14939}{3600} \approx 4,15$.

13. $\frac{758}{5} \approx 152$ фильма. 190; не существует; $\frac{273}{2}$.

$$20. x = \frac{1}{20}; y = \frac{7}{20}.$$

$$21. x = \frac{169}{450}; y = \frac{53}{150}; z = \frac{1}{225}.$$

$$22. x = \frac{60\sigma^2 - 157}{180}; y = \frac{97}{60} - \frac{\sigma^2}{2}; z = \frac{\sigma^2}{6} - \frac{23}{180}; \frac{157}{60} \leq \sigma^2 \leq \frac{97}{30}.$$

К параграфу 4.3

$$4. \text{ а) } 6; \text{ б) } 120; \text{ в) } 7920; \text{ г) } 336; \text{ д) } 20; \text{ е) } 680.$$

$$5. 2^4 = 16.$$

$$6. 110.$$

$$7. 4^{10} = 1048576.$$

$$8. 10^3 30^3 = 27000000.$$

$$9. 12! = 479001600.$$

$$10. \frac{13!}{2^4} = 389188800.$$

$$11. 153.$$

$$12. C_n^3.$$

$$13. 604800.$$

$$14. 90 \cdot 55 = 281250.$$

$$15. \frac{n(n-3)}{2}.$$

$$16. C_{m+1}^n.$$

$$17. C_{30}^{15} = 155117520.$$

$$18. C_{22}^5 = 26334.$$

$$19. C_{11}^5 C_{10}^5 = 116424.$$

$$20. 210.$$

К параграфу 4.4

9. $\frac{1}{3}$.

10. а) $\frac{3}{28}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{28}$; г) 0; д) $\frac{3}{14}$.

11. 0,061.

12. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{5}{9}$.

13. а) 0,3024; б) 0,01; в) $0,9^5$; г) $\frac{1}{32}$.

14. а) 0,096; б) 0,936.

15. а) 0,255; б) 0,057375; в) $1 - 0,85^4$.

16. $\frac{300}{3553}$.

17. а) $\frac{7}{24}$; б) $\frac{7}{40}$.

18. а) $\frac{1}{35}$; б) $\frac{18}{35}$.

19. $P(A) = \frac{C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}}$; $P(B) = 0$; $P(C) = \frac{C_{40}^6 \cdot C_{10}^2}{C_{50}^8}$; $P(C) = 1 - (C_{50}^{10})^{-1}$.

20. а) $\frac{57}{115}$; б) $\frac{229}{230}$; в) $\frac{2}{23}$.

21. $\frac{(C_{20}^{10})^2}{C_{40}^{20}}$.

К параграфу 5.1

2. а) $5 - 5i$; б) $7 + 5i$; в) 8; г) $5 + 2i$.

3. а) $-13i$; б) $10 + 2i$; в) $27 + 8i$; г) $6 - 8i$.

4. а) $x = 7$, $y = 1$; б) $x = 6$, $y = 0$; в) $x = 1$, $y = 2$; г) $x = 1$, $y = -1$.

5. а) 0 и 4; б) ± 1 ; в) 1 и 3; г) таких нет.

6. а) 0,5; б) таких нет; в) $\pm \sqrt{2}$; г) 0 и -2 .

7. а) -10 ; б) 0.

8. а) $-2 - 2i$; б) -4 ; в) $-4 - 4i$; г) $8i$.

9. а) 1,5; б) 2 и -1,5.
 10. а) 1; б) $5i$.
 11. а) ± 1 ; б) 1.
 12. а) $1+5i$; б) $-0,28+0,96i$.
 13. а) -1; б) Если 1) $n=4k$, то 0, 2) $n=4k+1$, то i , 3) $n=4k+2$, то $-1+i$,
 4) $n=4k+3$, то -1.
 14. а) 1; б) Если 1) $n=8k$, то 1, 2) $n=8k+1$, то i , 3) $n=8k+2$, то $-i$,
 4) $n=8k+3$, то -1; 5) $n=8k+4$, то -1; 6) $n=8k+5$, то $-i$; 7) $n=8k+6$, то i ;
 8) $n=8k+7$, то 1.
 15. а) $n=8$; б) $n=8$.

К параграфу 5.2

2. а) $-1-i$; б) $5+3i$; в) $2-i$; г) $5i$.
 3. а) $1-i$; б) $-10-i$; в) $-1,5-3,5i$; г) $-0,5-0,64i$.
 4. а) $1-i$; б) $1+i$; в) $0,6+0,8i$; г) $4+3i$.
 5. а) $-i$; б) -1; в) 0; г) 0.
 6. а) $-i$; б) 0; в) $\frac{2}{3}$; г) 0.
 7. 2.
 8. а) $3,2-7,4i$; б) $-\frac{27}{13}+\frac{21}{13}i$; в) $\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i$; г) $-\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i$.
 9. а) $\frac{14}{5}i$; б) $3,9-2,3i$.
 10. а) $1+2i$; б) $1-i$.
 11. а) да; б) нет.
 12. а) $x=-4$, $y=6$; б) $x=1$ и $y=1$, $x=-1$ и $y=-1$.
 13. а) -1; б) Если 1) $m=4k$, то 0, 2) $m=4k+1$, то $-i$, 3) $m=4k+2$, то $-1-i$,
 4) $m=4k+3$, то -1.

К параграфу 5.3

2. а) $\pm i$; б) $\pm\sqrt{2}i$; в) $\pm 3i$; г) $\pm i\sqrt{5+\sqrt{3}}$.
3. а) $1 \pm i$; б) $-2 \pm i\sqrt{3}$; в) $\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{7}}{4}$; г) $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. а) $z^2 - 2z + 2 = 0$; б) $z^2 - 2z + 5 = 0$; в) $z^2 - 6z + 13 = 0$; г) $z^2 + 4z + 29 = 0$.
5. а) $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$; б) $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\pm 2, \pm 2i$; г) $\pm 3, \pm 3i$.
6. а) $\pm i2\sqrt{2}$; б) $\pm i\sqrt{14}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\pm(1-i)$.
8. а) $x = 3 + 6i$ и $y = 3 - 6i$, $x = 3 - 6i$ и $y = 3 + 6i$;
- б) $x = \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{23}}{6}$ и $y = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{23}}{4}$, $x = \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{23}}{6}$ и $y = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{23}}{4}$.
9. а) $1; -1 \pm i\sqrt{3}$; б) -1 и $-1 \pm i\sqrt{2}$.
10. а) $2z^2 + 10z + 17 = 0$; б) $5z^2 + 8z + 13 = 0$
11. а) $a = 5$ и $b = 12$; б) $a = -5$ и $b = -12$; в) $a = 24$ и $b = -10$;
г) $a = -32$ и $b = 24$.
13. а) $-1; 1 \pm 2i$; б) $-0,5 + bi$, где $b \in \mathbb{R}$.
14. а) $\pm(4 - 3i)$; б) $\pm(3 - 2i)$.
15. а) $-3 - 2i$

К параграфу 5.4

3. а) $\sqrt{2}$ и $\frac{7\pi}{4}$; б) $\sqrt{2}$ и $-\frac{3\pi}{4}$; в) $\sqrt{13}$ и $\arctg\frac{3}{2}$; г) $\sqrt{13}$ и $-\arctg\frac{2}{3}$.
4. а) $1 + i\sqrt{3}$; б) $1 + i$; в) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$; г) $-3i$.
5. а) $2 - i$ и $-2 + i$; б) $-7 + i$ и $7 - i$; в) $3 - 2i$ и $-3 + 2i$; г) $1 + 2i$ и $-1 - 2i$
6. а) прямая $x = 1$; б) прямая $y = 1$; в) прямая $x = y$; г) прямая $x + y = 0$.
7. а) луч $y = 0$ при $x > 0$; б) луч $y = 0$ при $x < 0$; в) начало координат;
г) окружность с центром в начале координат и радиусом 1.
9. а) симметрично точке 0; б) симметрично действительной оси.
10. а) см. рис. 1; б) см. рис. 2; в) см. рис. 3; г) см. рис. 4.

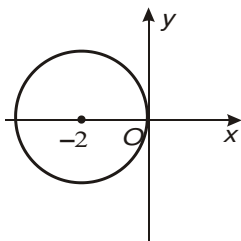


рис. 1

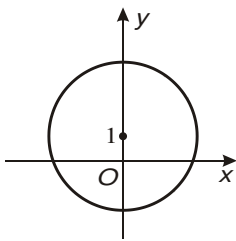


рис.2

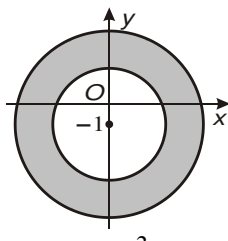


рис.3

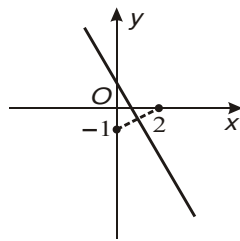


рис.4

11. а) см. рис. 1; б) см. рис. 2; в) см. рис. 3; г) см. рис. 4.

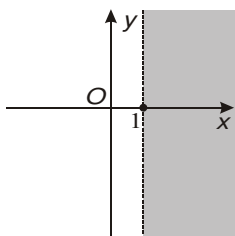


рис. 1

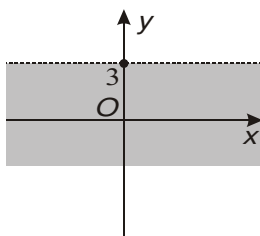


рис.2

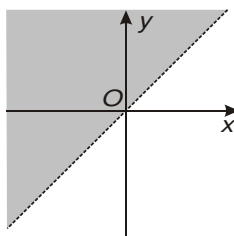


рис.3

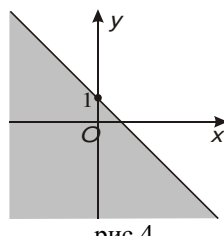


рис.4

12. а) $z = 3 - i$; б) $z = 2 - 3i$.

13. $-1 - 3i$, $-5 - i$, $3 + 5i$.

14. а) прямая $x = 3$; б) прямая $y = 1$.

15. а) $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

16. а) ни одного; б) одно.

17а) Сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

К параграфу 5.5

2. а) $1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$; б) $1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$; в) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$;

г) $\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$; д) $z = \sqrt{13}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$;

е) $z = \sqrt{13}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$.

3. а) $-i$; б) $-\sqrt{3} + i$; в) $1 - i$; г) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$; д) $-2 + 2\sqrt{3}$; е) $\sqrt{8}$.

4. а) -1 и $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; б) i и $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; в) $-i$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5. а) $\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}$; б) $\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}$; в) $\cos\frac{17\pi}{10}+i\sin\frac{17\pi}{10}$;

г) $\cos\frac{13\pi}{10}+i\sin\frac{13\pi}{10}$.

6. а) Окружность с радиусом 1 и центром в начале координат;

б) сектор окружности с радиусом 1 и центром в начале координат, ограниченный осью абсцисс и биссектрисой I четверти.

7. а) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; б) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$;

в) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; г) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

8. а) $z = \sqrt{10}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\varphi = \arctg\frac{1}{3}$; б) $z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$\varphi = \pi - \arctg 2$; в) $z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ где $\varphi = -\arctg\frac{1}{2}$; г) $z = \sqrt{41}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $\varphi = -\pi + \arctg\frac{4}{5}$.

9. а) $z = -2\sin\frac{9}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi+9}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+9}{2}\right)\right)$;

б) $z = 2\sin\frac{13}{2} \left(\cos\frac{5\pi-13}{2} + i\sin\frac{5\pi-13}{2}\right)$.

10. а) $z = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $z = \cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha)$.

К параграфу 5.6

2. а) $\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$; б) $\cos\frac{3\pi}{14}+i\sin\frac{3\pi}{14}$; в) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;

г) $\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)\right)^{12}$.

3. а) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{40}+i\sin\frac{\pi}{40}\right)$; б) $\cos\left(\frac{3\pi}{14}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{14}+\frac{2\pi k}{3}\right)$, где $k = 0; 1; 2$;

в) $\cos\left(\frac{5\pi}{14} + \frac{\pi k}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{14} + \frac{\pi k}{2}\right)$, где $k = 0; 1; 2; 3$;

г) $\cos\left(-\frac{2\pi}{17} + \frac{2\pi k}{5}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{17} + \frac{2\pi k}{5}\right)$, где $k = 0; 1; 2; 3; 4$.

5. а) $\cos\frac{2\pi k}{3} + i \sin\frac{2\pi k}{3}$, где $k = 0, 1, 2$; б) $\cos\frac{\pi k}{2} + i \sin\frac{\pi k}{2}$, где $k = 0, 1, 2, 3$;

в) $\cos\frac{\pi k}{3} + i \sin\frac{\pi k}{3}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$; г) $\cos\frac{2\pi k}{7} + i \sin\frac{2\pi k}{7}$, где

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

6. а) -4 ; б) -4 ; в) $8i$; г) -8 .

7. а) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $(6 - 4\sqrt{2})i$.

8. 0.

9. $\cos\frac{-4\pi}{5} + i \sin\frac{-4\pi}{5}$; $\cos\frac{-2\pi}{5} + i \sin\frac{-2\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}$.

10. 0.

11. $2\cos\frac{\pi n}{3}$.

12. а) $\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$; б) $\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ГЛАВА I. СТЕПЕНИ, КОРНИ, ЛОГАРИФМЫ.....	4
1.1. Степенная функция с натуральным показателем и её свойства	4
1.2. Корень степени n	12
1.3. Свойства корней степени n	22
1.4. Степень с рациональным показателем.....	29
1.5*. Предел последовательности.....	45
1.6. Логарифмы.....	58
1.7. Логарифмическая функция	71
1.8. Производные показательной и логарифмической функций	77
ГЛАВА II. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ	86
2.1. Первообразная	86
2.2. Интеграл.....	98
2.3. Применения интеграла	109
ГЛАВА III. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ.....	119
3.1. Показательные и логарифмические уравнения	119
3.2. Показательные и логарифмические неравенства	125
3.3. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства: метод замены неизвестной	129
3.4. О преобразованиях логарифмических уравнений и неравенств	134
3.5. Примеры решения систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств	140
3.6. Иррациональные уравнения: стандартные приёмы решения	144
3.7. Примеры решения иррациональных уравнений: возведение в степень и замена переменных	148
ГЛАВА IV. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ.....	152
4.1. Метод математической индукции.....	152
4.2. Табличное и графическое представление данных.....	158
4.3. Элементы комбинаторики.....	170
4.4. Вычисление простейших вероятностей	179

ГЛАВА V*. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	192
5.1. Основные определения. Сложение и умножение комплексных чисел	192
5.2. Вычитание и деление комплексных чисел	197
5.3. Квадратные корни из отрицательных чисел	202
5.4. Геометрическая интерпретация комплексных чисел	206
5.5. Тригонометрическая форма комплексного числа	211
5.6. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел	215
5.7. Свойства комплексных корней многочленов	221
ОТВЕТЫ	224

Рубин Александр Григорьевич
Чулков Павел Викторович

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
11 класс
Базовый и углублённый уровни

Подписано в печать 21.07.16. Формат издания 70×90/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Журнальная.
Объём 16 п. л. Тираж 15 000 Заказ

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 – литература учебная

Издательство «Баласс»
109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»
Телефоны для справок: (499) 110-69-68, (495) 368-70-54, 672-23-12
<http://www.school2100.ru> E-mail: izd@balass.su